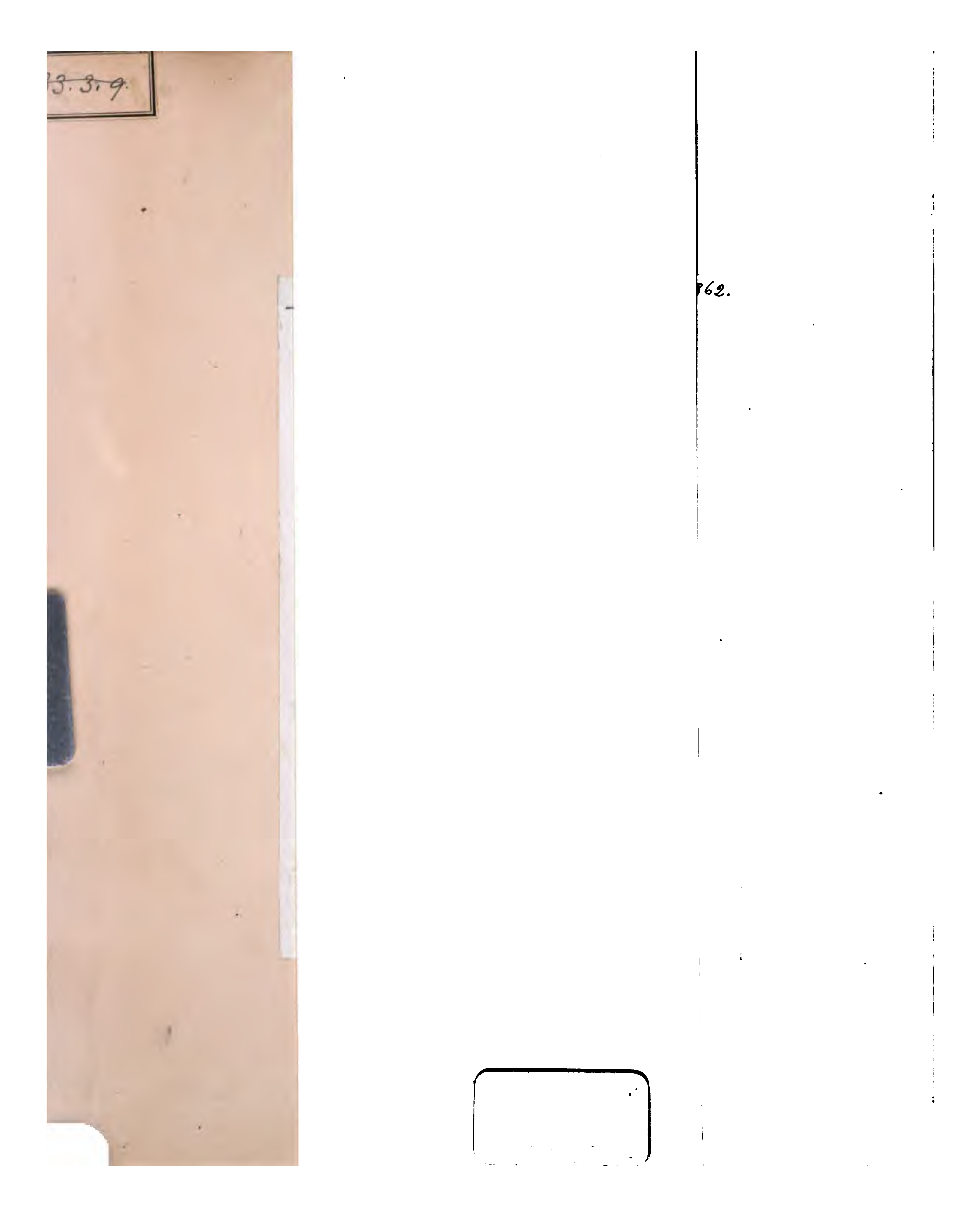



13.3.9.
862.

STATIQUE

DES VOUTES.

STATIQUE

DES VOUTES,

Contenant l'Essai d'une nouvelle Théorie de la Poussée, et un Appendice sur les anses de Panier;

Joseph Balthasar

PAR J. B. BERARD,

Juge au Tribunal de Briançon; Principal et Professeur de Mathématiques au Collége de la même ville; Membre de la Société d'Agriculture du département de la Seine, des Sociétés littéraires de Grenoble, Gap, Carpentras et Avignon.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57;

Et à La Haye, chez IMMERZEEL et Compagnie, Libraires.

1810.

1858, Feb. 8.
Gift Anonymous.

PRÉFACE.

M. Bossut, membre de l'Institut national, est l'auteur qui a traité avec le plus de détail la partie de la Statique, qui a pour objet l'équilibre des voûtes : son Traité se trouve à la fin de sa Mécanique, imprimée en 1802. Il est précédé d'une introduction qui sert à faire connaître l'objet de la Statique des voûtes, ainsi que l'historique de cette science. Je transcrirai ici cette introduction, afin de mettre le lecteur à même d'apprécier mon travail : je rendrai compte ensuite des motifs qui m'ont déterminé à traiter le même sujet, et des différences qui distinguent mon Ouvrage de tous ceux qui l'ont précédé.

« Tout le monde sait que les pierres ou les *voussoirs* » dont une voûte est composée, forment des espèces de » pyramides tronquées, qui, en s'appuyant les unes contre » les autres par leurs faces latérales et inclinées, se con- » trebalancent mutuellement, et demeurent suspendues en » l'air sans le secours d'aucun soutien inférieur; tout leur » effort se dirige vers les massifs, ou pieds-droits qui » soutiennent la voûte, comme si elle n'était qu'un seul et » même corps continu. Les voussoirs éprouvent l'action de » différentes forces, qui proviennent ou de leurs poids, ou » de pressions extérieures, ou du frottement, ou de la » cohésion des matières, etc. Toutes ces forces et les ré- » sistances des pieds-droits composent un système qui doit » être en équilibre, et de plus, cet état d'équilibre doit avoir » une consistance ferme et durable.

» Les forces particulières qui agissent de proche en pro-

» che sur chaque voussoir peuvent être fort différentes. Par
» exemple, dans une voûte demi-circulaire, le voussoir du
» milieu ou la clef, agit comme un coin contre le second vous-
» soir à droite et à gauche, et tend à le faire remonter; le se-
» cond voussoir agit de même contre le troisième; celui-ci
» contre le quatrième, ainsi de suite. Or, à mesure qu'on
» s'éloigne de la clef, les angles que forment les faces laté-
» rales des voussoirs avec l'horizon vont en diminuant;
» d'où il résulte que les pressions absolues des voussoirs
» doivent aller en augmentant, afin que les efforts résul-
» tans de ces pressions, perpendiculairement aux faces con-
» tiguës des voussoirs, soient égaux de proche en proche,
» et se fassent mutuellement équilibre.

» En général, quelles que puissent être la figure d'une
» voûte et la nature des forces qui agissent sur les vous-
» soirs, il doit exister entre toutes ces forces une relation
» telle que, tous les voussoirs, qui forment réellement des
» corps séparés, soient maintenus en équilibre dans toute
» l'étendue de la voûte, sans quoi elle se déformerait et
» tomberait par pièces : ensuite, lorsque cet équilibre par-
» tiel sera établi, on pourra considérer la voûte comme un
» corps continu, et il ne s'agira plus que de déterminer les
» dimensions que les pieds droits doivent avoir pour en
» soutenir la poussée, ou pour la porter sans s'écraser.

» Il ne paraît pas que les anciens architectes fussent con-
» duits par des principes certains et géométriques dans la
» recherche des moyens qu'ils employaient pour assurer la
» solidité de leurs édifices. L'expérience, l'imitation, et une
» mécanique naturelle, leur servaient de guides. Vitruve,
» qui florissait sous Auguste, et qui a rassemblé dans son
» *architecture* toutes les connaissances qu'il regarde comme

» nécessaires à ceux qui exercent cet art, ne parle aucu-
» nement des secours qu'ils doivent emprunter de la mé-
» canique pour connaître et décomposer les forces, et pour
» renvoyer leurs efforts vers des appuis capables de les sou-
» tenir. Il ne dit rien non plus de *l'art du trait*, ou de la
» coupe des pierres et des bois. Vraisemblablement les an-
» ciens architectes, occupés d'une manière exclusive de tout
» ce qui regardait la décoration externe et la distribution
» interne de leurs édifices, abandonnaient entièrement aux
» appareilleurs la partie de l'art, qui a pour objet la soli-
» dité et le détail des moyens de construction : en quoi
» ils ont eu malheureusement trop d'imitateurs parmi les
» modernes.

» On n'a commencé que très-tard à sentir la nécessité de
» soumettre le problème de l'équilibre des voûtes aux lois
» de la mécanique. En 1695, la Hire, dans son *Traité de
» mécanique*, établit par la théorie du coin la proportion
» suivant laquelle on doit faire augmenter les poids absolus
» des voussoirs, depuis la clef jusqu'aux *impostes*, dans une
» voûte demi-circulaire. L'historien de l'Académie des
» Sciences rapporte, sous l'année 1704, que Parent dé-
» termina, suivant les mêmes principes, mais seulement
» par points, la figure que doit avoir l'extrados d'une
» voûte dont l'intrados est un demi-cercle, et qu'il donna
» de plus la mesure de la poussée d'une telle voûte contre
» les pieds droits.

» J'ignore si cette solution a été imprimée.

» Les deux illustres frères, Jacques Bernoulli et Jean
» Bernoulli, Huyghens et Leibnitz, ayant résolu, en 1791,
» le problème de la *chaînette*, les géomètres ne tardèrent
» pas à s'apercevoir que la figure de cette courbe, retour-

» née de bas en haut, est celle qu'on doit donner à une
» voûte composée de voussoirs infiniment petits et égale-
» ment pesans, pour que toutes ses parties soient en
» équilibre. David Gregori fit remarquer le premier cette
» identité, dans les *Transactions philosophiques* pour l'an-
» née 1707; mais son raisonnement, quoiqu'exact, n'avait
» pas toute la clarté qu'on pouvait desirer.

» On trouve dans l'un des Mémoires posthumes de Jac-
» ques Bernoulli deux solutions directes du problème,
» fondées sur deux différentes manières d'envisager l'action
» des voussoirs. La première est claire, simple, exacte, et
» conduit facilement à la véritable équation de la courbe
» qui est la chaînette retournée; la seconde a besoin d'une
» petite correction, que l'auteur aurait sans doute faite lui-
» même, s'il eût pu revoir son Mémoire, et que Cramer,
» éditeur de ses œuvres, a indiquée : au moyen de cette
» correction, on retrouve également l'équation de la
» chaînette.

» Dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour
» l'année 1712, La Hire, considérant le problème de la
» poussée des voûtes, sous un point de vue indiqué par
» quelques expériences, en donna une solution, qui, par
» la simplicité du calcul et des résultats, fut saisie et adoptée
» avidement par la plupart des praticiens, sans s'embarrasser
» si elle était applicable à tous les cas qui peuvent arriver.
» Il suppose que les voûtes dont les pieds-droits n'ont pas
» une épaisseur suffisante pour en soutenir la poussée, se
» fendait vers les reins à la hauteur d'environ 45 degrés au-
» dessous des impostes : en conséquence il regarde la partie
» supérieure de la voûte comme un coin qui tend à écarter
» ou à renverser les pieds-droits, et il détermine, par la

» théorie du coin et du levier, les dimensions qu'ils doi- » vent avoir pour résister à leur effort. On s'en est tenu » pendant long-temps uniquement à cette méthode pour » les voûtes en berceau; on l'a même appliquée aux voûtes » en dôme, quoique les deux cas ne se ressemblent point, » et qu'ils conduisent à des équations de degrés différens, » comme on le verra par la suite.

» Couplet a donné en deux parties un Mémoire sur la » poussée des voûtes en berceau; la première, imprimée » dans le volume de l'Académie pour l'année 1729, traite » de la poussée des voûtes et de l'épaisseur de leurs pieds- » droits, en considérant les voussoirs comme infiniment » polis, ou comme pouvant glisser les uns sur les autres, » sans éprouver aucune résistance de la part du frottement; » mais comme cette hypothèse n'est pas exactement con- » forme à l'expérience, la seconde partie du Mémoire, » imprimée dans le volume de l'Académie pour l'année » 1730, a pour objet les mêmes questions, en sup- » posant que les voussoirs n'ont pas la faculté de glis- » ser, mais qu'ils peuvent se soulever et s'écarter les uns » des autres par de petits mouvemens de rotation. Toute » cette théorie est appliquée principalement aux voûtes » circulaires. Couplet détermine la proportion des poids » des voussoirs, et la figure qu'il faut donner à l'extrados » relativement à l'intrados : il n'a d'ailleurs ajouté que très- » peu de chose aux théories de La Hire et Parent; et aucun » d'eux n'a traité le sujet avec la généralité et la précision » nécessaires soit dans la théorie, soit dans la pratique.

« Le volume de l'Académie pour l'année 1734, contient » un Mémoire de Bouguer sur *les lignes courbes, propres* » *à former les voûtes en dôme*. L'auteur fait voir qu'on

» peut employer pour cela une infinité de lignes courbes, » et en même temps il indique la manière de choisir les plus » avantageuses. Il suppose toujours que les voussoirs ont » leurs surfaces infiniment polies; il établit, d'après cette » hypothèse, les conditions de l'équilibre dans chaque assise » horizontale d'une voûte en dôme. On voit que ce pro- » blème a de l'analogie avec celui de la chaînette retournée » pour les voûtes en berceau. Bouguer n'a dailleurs donné » aucune méthode pour déterminer la poussée des voûtes » en dôme; il n'a point examiné la loi des forces qui doi- » vent agir sur les voussoirs lorsque la courbe génératrice » est assujétie à des conditions données; matière féconde » en problèmes curieux et utiles.

» Tels sont les ouvrages, au moins ceux qui m'étaient » connus, sur l'équilibre des voûtes, lorsqu'en 1770, comme » les dates en font foi, je traitai la question dans toute sa » généralité, tant pour les voûtes en berceau que pour les » voûtes en dôme. J'examinai tout ce qui regarde la figure » et la poussée de ces deux espèces de voûtes, dans deux » mémoires imprimés parmi ceux de l'Académie des Scien- » ces de Paris, pour les années 1774 et 1776. Ce travail fut » entrepris à l'occasion du dôme de l'église de Sainte-Gene- » viève (aujourd'hui *le Panthéon français*) commencée par » le célèbre architecte Souflot, et achevée sur ses dessins. » Les piliers et les colonnes qui portent ce dôme ayant été » regardés par quelques critiques, peu versés dans la mé- » canique, comme insuffisans pour en soutenir la poussée, » je fus engagé à chercher la vraie formule générale, alors » inconnue, pour déterminer la poussée des voûtes en » dôme, comme la Hire a déterminé celle des voûtes en » berceau. L'application que je fis de ma formule au sujet » en question, prouve que les piliers avaient une épaisseur

» suffisante pour résister au renversement ; aussi l'édifice
» n'a-t-il éprouvé à cet égard aucun mouvement. Mais par
» l'usage vicieux où l'on était alors de creuser le lit des
» pierres vers l'intérieur, il est arrivé que le tassement,
» occasionné par la charge supérieure du dôme, a fait
» éclater les pierres vers les paremens, et que presque toutes
» les colonnes ont éprouvé les funestes effets de ce tasse-
» ment. Soufflot, lui-même, qui en eut une crainte antici-
» pée, entreprit de faire des expériences pour déter-
» miner la résistance dont les pierres sont capables sans
» s'écraser sous des pressions données. Il mourut en 1780,
» avec la malheureuse certitude oculaire, que les piliers de
» son dôme commençaient à se briser vers les bords. Sa ma-
» chine à écraser les pierres a été dans la suite fort perfec-
» tionnée par le cit. Rondelet, qui a fait un grand nombre
» d'expériences sur la résistance des pierres de différentes
» espèces et de différentes dimensions : il a déjà publié une
» partie de ce travail dans son *Mémoire historique sur le*
» *Panthéon français* (1793); il l'a continué avec succès, et
» on en doit attendre les plus grands avantages pour la con-
» naissance de cette branche importante de l'architecture.
» J'ajouterai ici qu'on a pris en dernier lieu des précautions
» efficaces contre les progrès de l'affaissement du dôme du
» Panthéon français.

» Le tome 7 des ouvrages présentés à l'Académie des
» Sciences, contient, sous la date de l'année 1773, un beau
» Mémoire du cit. Coulomb, aujourd'hui membre de l'Ins-
» titut national, sur quelques problèmes relatifs à l'archi-
» tecture. Parmi ces problèmes se trouve celui de l'équilibre
» des voûtes en berceau, que l'auteur a traité par une mé-
» thode dirigée vers l'utilité-pratique.

» En 1785, le cit. Mascheroni fit imprimer à Bergame un
» ouvrage intitulé : *Nuove Richerche sull' equilibrio delle*
» *volte*, dans lequel il y a des propositions curieuses sur
» l'équilibre des voûtes, principalement sur l'équilibre des
» voûtes en dôme, à bases circulaires, elliptiques et poly-
» gonales. L'auteur reconnaît lui-même que mes deux Mé-
» moires ne lui ont pas été inutiles.

» Un grand nombre de nouvelles réflexions théoriques
» et expérimentales que j'ai faites, depuis mes premiers
» essais, sur toute cette matière, m'ont déterminé à la re-
» prendre et à la traiter avec toute l'étendue nécessaire pour
» rendre mes recherches utiles aux mécaniciens-géomètres.
» J'ai d'ailleurs toujours suivi mes anciens principes : j'aurai
» donc pu donner mes additions en forme de supplément à
» mes deux Mémoires; mais cela aurait demandé une foule
» de citations et de renvois, incompatibles avec la méthode
» et la clarté, qui ne peuvent avoir lieu lorsque chaque
» chose n'est pas à sa véritable place. J'ai préféré de refondre
» entièrement mes deux Mémoires, et d'y incorporer les
» additions, de telle manière que le tout forme maintenant
» un ouvrage comme nouveau.

» Je considérerai séparément l'équilibre des voûtes en
» berceau, et celui des voûtes en dôme. »

Après avoir fait connaître le travail de M. Bossut, il me resterait à donner un précis du mien. Un coup d'œil sur ma table sommaire suffit pour donner une idée du plan que j'ai adopté et des matières que j'ai traitées. Je n'ajouterai que quelques réflexions.

Dans le premier chapitre, j'expose les principes de l'équilibre entre les voussoirs d'une voûte en berceau, en supposant ces voussoirs soumis à deux espèces de forces et de

plan

plan sans frottement. La solution de ce problème général que j'ai donnée dans le n° 4 est entièrement nouvelle : elle est simple et conduit à une équation différentielle qui dans les applications se prête à des intégrations faciles. J'ai considéré le sujet sous les différens points de vue qu'il présente, et j'ai appliqué mes formules aux courbes les plus usitées, ainsi qu'à d'autres qui pourraient être employées avantageusement.

Dans le chapitre 2, j'ai traité de la poussée des voûtes en berçeau, problème qui ne saurait être résolu rigoureusement, à cause des données physiques qu'il faut considérer. Après avoir rapporté les hypothèses connues, j'ai fait voir l'inexactitude de celles de La Hire, à cause de l'incertitude du joint de rupture dont la position varie suivant la figure de la voûte. J'ai prouvé qu'on ne pouvait se dispenser de faire entrer dans le calcul les effets du frottement, et il en est résulté une théorie entièrement nouvelle, qui a l'avantage de bannir l'arbitraire dans la détermination du joint de rupture. C'est aux géomètres à juger le mérite de cette partie de mon travail, qui me paraît la plus importante.

Dans les chapitres 3 et 4, j'ai traité, pour les dômes à bases circulaires, les mêmes questions que j'avais examinées dans les deux premiers chapitres à l'égard des voûtes en berceau. J'ai fait remarquer une singularité assez frappante ; savoir, que la surface d'extrados doit se terminer à la clef par une flèche ou pyramide qui s'étend à l'infini, à moins que le rayon de courbure de l'intrados à la clef ne soit infini.

Dans le chapitre 5, j'ai traité des dômes à base régulière et polygonale, ainsi que de ceux dont les joints n'étant pas normaux, concourent en un même point.

Enfin, j'ai terminé mon Ouvrage par une appendice sur les anses de panier, espèces de courbes usitées dans la construction des ponts. Je ne connais aucun traité sur cette matière, qui cependant présente de l'intérêt.

J'ai examiné plusieurs questions que n'a point traitées M. Bossut, j'ai osé relever quelques inexactitudes qui ont échappé à ce savant géomètre. Mon estime pour son nom et mon respect pour son grand âge, ont dû céder aux devoirs impérieux que commandent l'intérêt de la science et l'amour de la vérité. J'ai d'ailleurs pensé que l'importance du sujet, aussi bien que l'intérêt des architectes et ingénieurs, exigeaient que la matière fût plus développée, ce qui m'a déterminé à l'étendre dans un cadre, environ quatre fois plus grand. Je ne prétends pas cependant avoir épuisé une matière qui est très-féconde; mais ce que j'en ai dit peut suffire aux architectes-géomètres pour les guider dans tous les cas qui peuvent se présenter. C'est pour eux uniquement que mon livre est destiné, parce que les bonnes méthodes de construction, fondées sur des théories rigoureuses, ne peuvent devenir communes qu'après avoir été adoptées par les ingénieurs instruits: je m'estimerai heureux si mon travail a pu mériter leur suffrage.

Déjà plusieurs savans géomètres, MM. Deprony, Lacroix, Puissant, etc., ont bien voulu s'expliquer avantageusement sur ma Statique des Voûtes: on me permettra de rapporter ici la lettre écrite à ce sujet par M. Deprony à M. Houdouard. Le suffrage honorable qu'elle renferme me fait espérer que mes efforts n'auront pas été tout-à-fait inutiles au progrès de la science.

Paris, le 15 janvier 1809.

L'Inspecteur général, Directeur de l'École impériale des Ponts et Chaussées, membre de l'Institut des sciences, lettres et arts de France, et de la Légion d'honneur, à M. Houdouard, *membre du Corps législatif, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.*

Je vous remercie, Monsieur et cher Camarade, de la communication que vous avez bien voulu me donner du Traité manuscrit de l'équilibre des voûtes, *de M. Berard; j'ai parcouru, avec grand plaisir, cet ouvrage pendant le peu de momens que me laissent mes occupations multipliées, et je pense que les Ingénieurs qui ont du goût pour les belles études rationnelles, applicables à la pratique de leur art, le liront avec beaucoup d'intérêt. Cet intérêt, dû à l'ouvrage, est singulièrement augmenté par celui qu'inspire l'Auteur, à qui je vous prie de dire, en lui faisant, de ma part, mille complimens, que je répondrai très-prochainement à la lettre qu'il m'a fait l'amitié de m'écrire.*

Agréez, Monsieur et cher Camarade, l'assurance de ma parfaite estime et de mon sincère attachement.

DEPRONY.

TABLE SOMMAIRE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre entre les voussoirs d'une voûte en berceau.

SECTION PREMIÈRE.

SECTION II.

Applications pour construire l'extrados quand on connaît l'intrados.

SECTION III.

Applications. Trouver l'intrados quand on connaît la loi des forces ou l'extrados.

CHAPITRE II.

De la poussée des berceaux et de leur équilibre avec les pieds-droits.

SECTION PREMIÈRE.

Notions préliminaires.

SECTION II.

Différentes hypothèses sur la poussée.

SECTION III.

Essai d'une théorie nouvelle et plus rigoureuse de la poussée en ayant égard au frottement.

SECTION IV.

Applications à différentes espèces de voûtes.

SECTION V.

Du pied-droit d'égale résistance et du minimum *des matériaux.*

CHAPITRE III.

De l'équilibre entre les voussoirs des voûtes en dôme à base circulaire.

SECTION PREMIÈRE.

SECTION II.

Applications.

CHAPITRE IV.

De l'équilibre entre les dômes à base circulaire, et les tambours qui les supportent.

SECTION PREMIÈRE.

Équations d'équilibre entre le dôme et le tambour.

SECTION II.

Applications.

SECTION III.

Du tambour d'égale résistance et du minimum des matériaux.

CHAPITRE V.

Des voûtes irrégulières, ou dont les joints ne sont pas normaux à l'intrados.

SECTION PREMIÈRE.

Des voûtes dont les joints concourent en un même point.

SECTION II.

Des voûtes à base régulière et symétrique.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE.

THÉORIE

DE

L'ÉQUILIBRE DES VOÛTES.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LES VOUSSOIRS D'UNE VOÛTE EN BERCEAU.

SECTION PREMIÈRE.

Problème général.

ÉTANT donné l'intrados, trouver l'extrados, et réciproquement : ou bien, étant donné l'intrados, trouver la loi des forces, et réciproquement.

1. On sait qu'on appelle *voûte* une surface courbe en pierres, qui recouvre une base de figure quelconque. Si cette surface est engendrée par le mouvement d'une ligne courbe parallèlement à elle-même, la voûte est dite *en berceau*. Si la voûte est engendrée

par la révolution d'une courbe tournant autour d'un axe vertical, elle prend le nom de *dôme à base circulaire*, etc.

Les pierres dont est composée la voûte sont des espèces de coins ou de pyramides tronquées, appliquées les unes contre les autres; on les nomme *voussoirs*, et les faces par lesquelles ils se touchent s'appellent *joints*. Les joints doivent, tant pour la grace que pour la solidité de la construction, être perpendiculaires à la surface intérieure de la voûte, qu'on appelle *intrados;* la surface extérieure est nommée *extrados*.

On sent que chaque voussoir fait un effort pour écarter ceux qui le touchent: cet effort est variable pour chacun, et dépend de sa position. La voûte la plus parfaite serait celle où les efforts des différens voussoirs seraient tellement combinés, qu'en les supposant polis et sans frottement, tous ces efforts se détruiraient mutuellement; car alors il y aurait équilibre entre les diverses parties de la voûte: il ne resterait plus qu'à donner aux murs ou pieds-droits qui supportent la voûte, l'épaisseur suffisante pour résister à la poussée, c'est-à-dire à l'effort de la voûte pour renverser les pieds-droits.

C'est dans ce problème général que consiste la théorie de l'équilibre des voûtes. Il est rare que les Architectes se conforment aux principes de la Statique, et si l'on ne voit pas toutes les voûtes s'écrouler après qu'on a enlevé le cintre, c'est uniquement le frottement et la liaison du mortier qui préviennent cet accident.

Nous examinerons d'abord les conditions de l'équilibre entre les voussoirs des voûtes en berceau: nous déterminerons ensuite la poussée et l'épaisseur des pieds droits; puis nous passerons aux voûtes en dôme, en suivant le même ordre que pour celles en berceau.

Les voussoirs peuvent être sollicités par des forces de différentes espèces: nous examinerons ce problème général dans un autre article. Pour aller du simple au composé, nous commencerons par le cas le plus ordinaire, celui où les voussoirs ne sont soumis qu'à l'action de leur propre poids.

2. *Solution pour le cas où les voussoirs ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur.* EFF'E', EFMN, E'F'M'N', (fig. 1) sont trois coins

pesans, sans frottement; les deux derniers reposent sur les deux plans inclinés et symétriquement placés MN, M'N', et le premier repose entre les deux autres : on demande l'équation d'équilibre entre ces trois coins.

Soit 2M le poids du coin EFF'E', N celui de chacun des deux autres; ϵ l'angle aigu NRV formé par le joint NM avec la verticale VR; α l'angle aigu formé par le joint EF avec la verticale. Soit VT une perpendiculaire élevée sur le milieu de EF, V le point où elle rencontre la verticale passant par le centre de gravité du coin V, et T le point où elle rencontre la montée prolongée ou la verticale passant par la clef.

Le poids du coin intermédiaire, ou la force 2M, peut être supposée appliquée au point T de sa direction, et décomposée en deux autres égales TK, TK' : de même la force N peut être supposée agir au point V de sa direction, et décomposée en deux autres, l'une VI, perpendiculaire au plan MN et détruite par ce plan, l'autre Vh, directement opposée à la force TK. Il faudra donc, pour l'équilibre, qu'on ait $TK = Vh$: cherchons l'expression de ces deux lignes.

Si la force 2M est représentée par Tt, et si on mène l'horizontale Kg, on verra aisément qu'on a $TK = tK$; $Tg = M$; $KTt = KtT = 90° - \alpha$; $tKg = \alpha$; d'où l'on tire $TK = \frac{M}{\sin\alpha}$. On trouvera de même, que dans le triangle Vvh, on a (en faisant $Vv = N$) $Vvh = 90° - \epsilon$; $vVh = 90° + \alpha$; $vhV = \epsilon - \alpha$; d'où l'on tire $Vh = \frac{N\cos\epsilon}{\sin(\epsilon - \alpha)}$. L'équation d'équilibre devient $\frac{N\cos\epsilon}{\sin(\epsilon - \alpha)} = \frac{M}{\sin\alpha}$, d'où il est aisé de tirer $M \tan\epsilon = (M + N)\tan\alpha \ldots\ldots (1)$.

Si, au lieu de chercher l'équilibre entre trois coins, nous eussions regardé la montée TO comme un plan inébranlable, et cherché l'équation d'équilibre entre les deux coins SS'FE, EFMN, retenus entre les plans SS' et MN, il est évident que nous serions arrivés à la même équation (1). Cette équation exprime donc la relation qui doit toujours exister entre les masses M, N de deux portions de voûte SS'FE, EFMN, et les angles α et ϵ, quelles que soient d'ailleurs les figures de l'extrados et de l'intrados, du moins tant que la voûte n'est soumise qu'à la force de la pesanteur.

Comme rien jusqu'ici ne détermine la grandeur du coin EFNM, on peut supposer que l'autre SSFE demeurant le même, N devienne $N+\Delta N$, et tangϵ devienne tang$\epsilon+\Delta$ tangϵ. Alors l'équation (1) se change en

$$M(\text{tang}\,\epsilon+\Delta\,\text{tang}\,\epsilon)=(M+N+\Delta N)\,\text{tang}\,\alpha\,;$$

de laquelle retranchant l'équation (1) on tirera

$$\Delta N=\frac{M\,.\,\Delta(\text{tang}\,\epsilon)}{\text{tang}\,\alpha}\,\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Cette équation (2) exprime la relation entre la masse ΔN d'un voussoir quelconque, et l'incrément ou accroissement fini $\Delta(\text{tang}\,\epsilon)$, qui est donné par l'angle que forment les deux joints qui terminent ce voussoir. Si la matière de la voûte est homogène, on pourra prendre pour M et N les aires au lieu des poids. L'équation (2) peut servir à déterminer par points, soit l'extrados, soit l'intrados, quand on connaît l'un des deux. Mais nous exposerons plus bas un moyen plus commode, qui consiste à calculer la longueur de chaque joint.

Après avoir considéré une suite de coins ou voussoirs d'une grandeur finie, il faut passer au cas où ces voussoirs étant infiniment petits, la suite des joints forme une courbe d'intrados et une courbe d'extrados. Soit (fig. 2) MN un joint quelconque faisant avec la verticale un angle ϵ; mn, un autre joint infiniment proche; $SP=x$, $PM=y$, les coordonnées du point M. En imaginant un autre joint fixe EF et désignant par M la masse du coin SSFE, par N celle du coin variable EFMN, et par α l'angle formé par le joint EF, on aura tang$\,\epsilon=\frac{dx}{dy}$: l'équation (1) deviendra

$$M\frac{dx}{dy}=(M+N)\,\text{tang}\,\alpha\,\ldots\ldots\ldots(3):$$

ce sera l'équation de l'intrados, en observant que N est une fonction de x, y, qui doit être donnée, soit par la position de l'extrados, s'il est connu, soit par toute autre condition de la question.

On peut trouver encore une équation plus simple pour caractériser l'état d'équilibre. Si le voussoir N est très-petit, ce qu'il faut

supposer pour passer du polygone à la courbe, on a $N=dM$ et $\tang \epsilon = \tang \alpha + d.\tang \alpha$: faisant ces substitutions dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{M}{\tang \alpha} = \frac{dM}{d.\tang \alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

propriété très-remarquable. Cette dernière équation étant écrite ainsi : $\frac{dM}{M} = \frac{d.\tang \alpha}{\tang \alpha}$, et intégrée, donne $\log M = \log \tang \alpha + \log c$; d'où

$$\frac{M}{\tang \alpha} = c \ldots\ldots\ldots (5).$$

Cette équation fournit cette autre propriété remarquable, savoir, que l'espace M compris entre l'intrados et l'extrados est toujours quarrable puisqu'il est égal à $c \tang \alpha$, et que le rapport de cette aire à la tangente de l'angle correspondant α est invariable. Ces propriétés nous seront utiles par la suite. Nous ferons voir que la quantité $\frac{M}{\tang \alpha}$ exprime la poussée horizontale de la demi-voûte.

Il reste à trouver la longueur d'un joint de lit quelconque. En conservant les notations du n° précédent, et nommant de plus l'arc $SM = s$, R le rayon de courbure MI du point M de l'intrados, et K la grandeur cherchée du joint MN, on aura l'angle $MIm = d\epsilon$; $Mm = ds = Rd\epsilon$ (en appelant 1 le rayon des tables) ; l'arc NL décrit du point I comme centre $(R+K)d\epsilon$.

En remarquant que le triangle NnL est infiniment petit du second ordre, on trouvera que la surface du petit voussoir MNnm est $Kd\epsilon(R+\frac{1}{2}K)$. Mais l'équation (2) donne $dN = M\frac{d(\tang \epsilon)}{\tang \alpha} = \frac{Md\epsilon}{\tang \alpha . \cos^2 \epsilon}$: or dN est aussi l'aire du petit voussoir MNnm. Égalant les deux expressions de cette aire, et résolvant l'équation qui en résulte, on en tire $K = -R + \sqrt{\frac{2M}{\tang \alpha . \cos^2 \epsilon} + R^2}$, ou en mettant pour $\cos^2 \epsilon$ sa valeur $\frac{dy^2}{ds^2}$, et remplaçant par la lettre c la quantité constante $\frac{2M}{\tang \alpha} \ldots\ldots K = -R + \sqrt{\frac{cds^2}{dy^2} + R^2}$.

On peut dès à présent déterminer la constante c, en observant qu'à la clef, on a $ds = dy$, et qu'en appelant k l'épaisseur SS' de

la voûte en ce point, on doit avoir aussi $K = k$. Soit donc r ce que devient R à la clef, on trouvera $C = k^2 + 2rk$, et l'on aura finalement

$$K = -R + \sqrt{(k^2 + 2rk)\frac{ds^2}{dy^2} + R^2} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Cette équation (6) fournit le moyen le plus simple de construire l'extrados quand on connaît l'intrados.

On peut avoir besoin de connaître la nature de l'une des deux courbes d'intrados ou d'extrados, quand on connaît l'autre : je vais chercher les relations qui existent entre les coordonnées de l'une et celles de l'autre.

3. *Relations entre les coordonnées de l'intrados et celles de l'extrados.* Soit (fig. 3) $SQ = x'$ et $QN = y'$, deux coordonnées rectangulaires de l'extrados. Ayant mené la verticale MH, on aura $MH = x - x'$; $HN = y' - y$; $MN = K$. En comparant le triangle MNH avec le triangle infiniment petit formé par dx, dy, ds qui lui est semblable, on trouvera aisément les deux équations suivantes : $y' - y = \frac{Kdx}{ds}$, $x - x' = \frac{Kdy}{ds}$.

Éliminant K entre ces deux équations et l'équation (6), on aura les deux suivantes :

$$(y' - y)dy - (x - x')dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

$$(y' - y)\frac{ds}{dx} = -R + \sqrt{\frac{ds^2}{dy^2}(k^2 + 2rk) + R^2} \ldots (8).$$

Par le moyen de l'équation de l'intrados, $y = f(x)$, on fera disparaître des équations (7) et (8), dy, dx, ds et R, ainsi que y : on aura alors deux équations entre x, x', y', desquelles éliminant x, il viendra l'équation cherchée de l'extrados entre x' et y', il est évident que le problème sera toujours possible.

Si au contraire on connaît l'extrados et qu'on demande l'intrados, il faudra éliminer x' et y' des deux équations ci-dessus et de $y' = f(x')$: il viendra une équation différentielle du second ordre entre x et y, qu'il faudra intégrer deux fois : on aura deux constantes nouvelles c' et c'', outre c qu'il faut remettre dans l'équa-

tion (8) à la place de $k^2 + 2rk$. On déterminera ces trois constantes par les conditions, 1°. qu'on ait $x = 0$, quand $y = 0$; 2°. qu'on ait $\frac{dx}{dy} = 0$, quand $x = 0$; 3°. $x = a$, quand $y = b$. On voit que le second problème est toujours plus difficile que le premier, et permet de remplir certaines conditions; tandis que le premier est déterminé et algébrique.

4. *Solution plus générale.* Dans les articles précédens, les voussoirs n'étaient soumis qu'à la seule action de leur propre poids. Les formules que nous avons trouvées suffisent pour déterminer l'intrados par l'extrados, et réciproquement.

Mais les voussoirs peuvent être soumis à d'autres forces que celles de la pesanteur. Nous allons résoudre le problème général, en supposant les voussoirs soumis à deux espèces de forces, les unes normales, les autres verticales, et toutes deux variables pour chaque point de l'intrados. On peut ramener à ce cas tous les autres.

Première solution. Quelles que soient la grandeur et la direction des forces qui agissent sur la voûte, on peut toujours la concevoir composée de trois coins EFNM, E'F'N'M', EFE'F' (fig. 4), dont les deux premiers sont égaux et symétriquement placés. L'équilibre devra avoir lieu non-seulement entre ces trois coins, mais encore entre les parties ou voussoirs qui composent chaque coin: de plus, l'équilibre devra encore subsister, si on fait varier de grandeur le coin du milieu et les deux adjacens, ou seulement les deux coins extrêmes par la variation des plans MN, M'N' le coin EFE'F' restant le même. Nous allons employer ce dernier principe, comme étant plus simple.

Soit α l'angle formé par la verticale avec le joint fixe EF, ε celui que fait la même verticale avec le joint MN variable de position, P la force normale et variable qui presse chaque point de l'intrados, et Q la force verticale et variable de grandeur seulement qui agit sur le même point. Quelles que soient les grandeurs et les directions des forces P et Q qui agissent sur le coin intermédiaire EF', leur résultante, que j'appelle 2M, sera nécessairement verticale et passera par la clef.

Si on élève sur le milieu de EF, une perpendiculaire qui ren-

contre en T la montée prolongée, et qu'on décompose la force $2M = Tt$ en deux autres TK, TK′, il faudra que ces deux forces soient détruites par celles qui agissent sur les deux coins sur lesquels repose celui du milieu.

Soit $V\nu$ la résultante de toutes les forces qui agissent sur le coin MNFE, et V le point où elle est rencontrée par TV : si on la décompose en deux autres, l'une VI perpendiculaire au plan MN, par lequel elle sera détruite, et l'autre VH, il faudra, pour l'équilibre, qu'on ait $VH = TK$.

Nous avons vu, article 2, qu'on a $TK = \frac{M}{\sin\alpha}$: reste à trouver l'expression de VH.

Je décompose la force normale P qui agit sur chaque point de l'élément ds de l'arc EM, et qui est Pds, en deux, l'une horizontale, qu'on verra être $Pds\frac{dx}{ds}$ ou Pdx; l'autre verticale, qui sera Pdy. La somme des premières qui agissent sur l'arc fini ME est $\int Pdx$; celle des secondes est $\int Pdy$; ces intégrales étant censées prises depuis le point E jusqu'au point M.

Quant aux forces Q, leur résultante pour l'arc ME sera $\int Qds$.

Puisque nous avons représenté par $V\nu$ la résultante unique des trois groupes de forces ci-dessus, si on construit un parallélogramme sur cette ligne, comme diagonale, et dont les côtés soient l'un horizontal, l'autre vertical, on aura $Vx = \int Pdx$ et $Vr = \int Pdy + \int Qds$.

Soit prolongée Vr jusqu'en f, on aura les angles $VIf = \varepsilon - \alpha$; $IVf = 90° - \varepsilon$; $rf\nu = 90° - \alpha$; $f\nu r = \alpha$; on trouvera $f\nu = \frac{r\nu}{\cos\alpha}$; $rf = \text{tang}\,\alpha . r\nu$; $If = \frac{Vf\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)}$; d'où l'on conclut aisément

$$VH = \frac{\cos\varepsilon\left(\int Pdy + \int Qds + \text{tang}\,\alpha \int Pdx\right)}{\sin(\varepsilon - \alpha)} + \frac{\int Pdx}{\cos\alpha} = \frac{M}{\sin\alpha}.$$

Telle est l'équation d'équilibre qui, par de simples transformations, se met d'abord sous la forme suivante :

$$\frac{M}{\sin\alpha}(\cos\alpha\,\text{tang}\,\varepsilon - \sin\alpha) = \int Pdy + \int Qds + \text{tang}\,\varepsilon \int Pdx.$$

Pour

Pour faire disparaître le signe $\int$, et éviter l'indétermination du point E, d'où se comptent les intégrales, il faut différentier deux fois de suite l'équation ci-dessus, en se rappelant que M et α sont constans. Mettant ensuite pour tang ε sa valeur $\frac{dx}{dy}$, on arrive à l'équation $d\left(\frac{Pds^2}{dy\,d\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right)+d\left(\frac{Qds}{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right)+Pdx=0$, à laquelle on donne la forme suivante, plus commode, en y introduisant le rayon de courbure $R=\frac{ds^3}{dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$,

$$d\left(PR\,\frac{dy}{ds}\right)+d\left(\frac{QRdy^2}{ds^2}\right)+Pdx=0\ldots\ldots\ldots(9).$$

Pour faire usage de l'équation (9), il faudra y substituer pour P et Q leurs valeurs données par la nature de la question, et pour R une des valeurs suivantes, que l'on choisira de manière à avoir l'intégration la plus simple, savoir, $R=\frac{ds^3}{-dxd^2y}$; $R=\frac{ds^3}{-dx^2.d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; $R=\frac{ds^3}{dy^2.d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$; $R=\frac{ds^3}{dyd^2x}$; $R=\frac{dxds}{-d^2y}=\frac{dy\,ds}{d^2x}$, suivant qu'on a fait constant dx, ou dy, ou ds.

5. On trouverait une autre solution, en suivant une autre marche. On pourrait chercher l'équation d'équilibre, en considérant le voussoir du milieu comme étant d'une grandeur finie, mais variable et terminé par les coordonnées x et y, et regardant les voussoirs voisins comme infiniment petits, α serait variable et l'on aurait $\varepsilon=\alpha+d\alpha$; $Vx=Pdx$; $Vr=Pdy+Qds$. Les forces $\int Pdx$ se détruiraient pour les deux moitiés du voussoir du milieu; l'on aurait $Tt=2\int Pdy+2\int Qds$: en se conduisant comme dans la première solution, faisant attention que $\cos d\alpha=1$; $\sin d\alpha=d\alpha$, et rejetant les différentielles des ordres supérieurs, on trouve l'équation suivante :

$$d\left(PR\,\frac{dx}{ds}\right)+d\left(QR\,\frac{dxdy}{ds^2}\right)=Pdy+Qds\ldots\ldots\ldots(10).$$

Cette équation est plus composée que l'équation (9), sans être plus générale : elle donne les mêmes intégrales dans les applications.

6. *Troisième solution.* En considérant la courbe cherchée comme un polygone d'une infinité de côtés, on en prend trois consécutifs, *ab*, *bc*, *cd* (fig. 5 et 6), et supposant les forces appliquées aux angles, on décomposera celles qui sont appliquées à un même angle, chacune en deux autres dirigées suivant les deux côtés de cet angle : alors la condition générale de l'équilibre, est que pour chaque côté intermédiaire, tel que *bc* (fig. 5), la somme des forces qui agissent de *b* vers *c* soit égale à la somme de celles qui agissent de *c* vers *b*.

Cela est fondé sur ce qu'en supposant trois voussoirs quelconques renfermés entre deux plans immobiles, ils doivent encore être en équilibre par l'effet des forces qui leur sont appliquées.

Ici les forces P appliquées aux angles *b* et *c* partagent ces angles en deux parties égales, et les forces Q sont parallèles à l'axe des x. La force normale qui agit au point *b* sur tous les points de l'élément ds, est Pds : la force verticale est Qds. Ces forces seront, pour le point *c*, $ds(P+dP)$ et $ds(Q+dQ)$, en supposant ds constant.

Nommons $Sq=x$; $qa=y$; $ab=ds$; $bf=Pds$. Décomposons la force *bf* en deux autres, suivant les côtés du polygone. L'angle de contingence *abc* formé par les côtés du polygone sera exprimé par $\frac{ds}{R}$ en appelant R le rayon de courbure. Donc l'angle de contingence *bcz'* sera $\frac{ds}{R+dR}$.

Cela posé, en se rappelant que la résultante et les deux composantes sont représentées en grandeur, chacune par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres, on aura sin *gbe*, où sin *abe* : sin *fbg* :: $Pds : be$; donc en faisant attention que l'angle *fbg* est droit, on a $\frac{ds}{R} : 1 :: Pds : be = PR$. Par une décomposition et un raisonnement semblables pour le point *c*, on trouvera $CK = (P+dP)(R+dR)$.

Décomposons pareillement les forces Q ou *bk* (fig. 6.) [pour

éviter la confusion dans la figure (5)] en deux autres dirigées suivant les côtés du polygone. Nous aurons sin ibl, ou sin abz, ou sin bik : sin kbl ou sin aby :: Qds : bi, ou $\frac{ds}{R} : \frac{dy}{ds} :: Qds : bi = \frac{QRdy}{ds}$.

On trouvera de même pour le point c, sin mcb : sin mcn, ou sin $z'cy'$, ou sin $(bcy' - bcz')$ :: $ds(Q+dQ) : co$. Or
$\sin(bcy'-bcz') = \sin bcy' \cos bcz' - \sin bcz' \cos bcy' = \frac{dy+d^2y}{ds} - \frac{dx+d^2x}{R+dR}$
(parce que le cosinus de bcz' est censé égal au rayon) : donc

$$co = \frac{(Q+dQ)(R+dR)(dy+d^2y)}{ds} - (Q+dQ)(dx+d^2x).$$

Substituant dans l'équation d'équilibre $be+bi=ck+co$ les valeurs de ces forces, on a

$$PR+\frac{QRdy}{ds}=(P+dP)(R+dR)+\frac{(Q+dQ)(R+dR)(dy+d^2y)}{ds}-(Q+dQ)(dx+d^2x),$$

équation qui n'est autre chose que celle-ci, en rejetant comme il convient les différentielles des ordres supérieurs,

$$d(PR)+d\left(\frac{QRdy}{ds}\right)-Qdx=0 \ldots\ldots\ldots (11).$$

Cette dernière équation revient au même, et donne les mêmes résultats que l'équation (9) de la première solution, quoiqu'elles se présentent sous des formes différentes. Cette différence tient à la manière dont les forces ont été décomposées. L'équation de la première solution devra être préférée comme donnant des intégrales plus commodes, lorsque les forces P seront nulles : ce sera le contraire quand les forces Q seront nulles, et l'équation (11) sera préférable.

7. *Relation entre la grandeur du joint et le poids qui presse l'intrados.* Quand on connaît l'intrados, et qu'on demande l'extrados, on peut toujours le tracer, comme nous avons vu par l'équation (6) du n° 2, s'il n'y a que des forces verticales, et c'est toujours le moyen le plus simple. Cependant, on peut avoir besoin de connaître la loi des forces Q qui agissent sur chaque point de l'intrados, lesquelles sont proportionnelles aux aires des voussoirs, et non pas

aux grandeurs K des joints : il est donc à propos de chercher la relation entre K et Q.

Dans l'équation (9) du n° 4, la quantité Q exprime le poids qui presse chaque point du petit arc ds de l'intrados : le poids qui presse cet arc est donc Qds; mais ce poids n'est autre chose que celui du voussoir lui-même, ou de son aire ; or l'expression de cette aire est (n° 2) $\frac{Kds}{2R}(2R+K)$: on en conclut

$$\frac{K}{2R}(2R+K)=Q\ldots\ldots\ldots(12).$$

Au moyen de cette équation, lorsqu'on connaîtra le rayon R de courbure de l'intrados, pour un point quelconque de la courbe, et l'une des deux quantités K ou Q, on trouvera l'autre.

8. Nous avons déjà dit que l'aire de toute voûte équilibrée est quarrable. L'équation (9) du n° 4 fournit une expression simple de cette aire. En effet quand les forces P sont nulles, cette équation (9) se réduit à un seul terme, et intégrant elle devient $\frac{QRdy^2}{ds^2}=C'\ldots(a)$. Pour déterminer la constante C', il faut remarquer qu'à la clef on a $dy=ds$; $R=r$; $Q=q$, et que l'équation (12) donne $q=\frac{k}{2r}(2r+k)$; d'où l'on conclut $C'=\frac{1}{2}k(2r+k)$. Substituant cette valeur de C', et pour R sa valeur $\frac{ds^3}{dy^2.d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$ dans l'équation (a), elle devient $Qds=\frac{1}{2}k(2r+k)d\frac{dx}{dy}$, et intégrant on a

$$\int Qds=\text{aire}=M=\frac{1}{2}k(2r+k)\frac{dx}{dy}\ldots\ldots\ldots\ldots(13),$$

intégrale qui n'exige pas de nouvelle constante.

L'équation $\frac{M}{\tang\alpha}=C$ trouvée dans le n° 2, aurait conduit au même résultat.

SECTION II.

Applications pour construire l'extrados quand on connaît l'intrados.

9. *L'intrados étant elliptique, trouver l'extrados.*

Soit pour intrados une ellipse surhaussée (fig. 7), et surabaissée (fig. 8), dont la montée est a, et la demi-base b; son équation sera, dans les deux cas, $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$: on trouvera

$$R = \frac{1}{a^4 b}\{a^4(2ax - x^2) + b^4(a-x)^2\}^{\frac{3}{2}}; \quad r = \frac{b^2}{a};$$

$$\frac{ds^2}{dy^2} = 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^2(a-x)^2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$K = -R + \sqrt{(k^2 + 2rk)\frac{ds^2}{dy^2} + R^2},$$

feront connaître K, et serviront à construire par points l'extrados. On observera que l'épaisseur K de la voûte va en augmentant depuis la clef jusqu'aux naissances où elle est infinie. A la rigueur, et abstraction faite du frottement, on voit qu'il ne serait pas possible de mettre le voussoir des naissances en équilibre avec les autres. Dans la pratique, le frottement s'oppose au glissement de ce dernier voussoir.

10. *L'intrados étant circulaire, trouver l'extrados.* Il suffit de faire $b = a$ dans les expressions du n° précédent, et l'on trouvera

$$K = -a + a\sqrt{\frac{k^2 + 2ak}{(a-x)^2} + 1}.$$

On tire de cette expression une construction simple que voici :

Menez (fig. 3) les horizontales Ss, S$'s'$; et ayant décrit un demi-cercle sur Rs' comme diamètre, portez Ss de s' en N$'$, puis faites RN = RN$'$; le point N appartiendra à la courbe de l'extrados. On répétera la même opération pour chaque voussoir.

Si l'on veut connaître la nature de la courbe d'extrados rapportée à des coordonnées rectangulaires x' et y', comme dans le n° 3, on aura ici pour $y=f(x)$, l'équation $y=\sqrt{2ax-x^2}$, et en se conduisant comme il est prescrit dans le numéro cité, on trouvera l'équation suivante :

$$y'^2 = \frac{a^2(a-x')^{2'}}{(a-x')^2-k^2-2ak}-(a-x')^2.$$

Il faut remarquer ici, comme dans le n° précédent, que la grandeur K des joints va sans cesse en augmentant depuis la clef, ce qui explique pourquoi les berceaux cylindriques d'épaisseur égale se rompent ordinairement vers les reins. On doit en conclure que dans la construction on ne doit pas négliger de fortifier ces berceaux depuis le voussoir, de 45° environ jusqu'aux naissances.

11. *L'intrados étant parabolique, construire l'extrados.*

Soit l'intrados une parabole dont l'équation est $y^2=px$: on aura

$$\frac{ds^2}{dy^2}=\frac{4y^2+p^2}{p^2}; \quad \text{R}=\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (6), et faisant attention qu'on a ici $r=\frac{1}{2}p$, on trouvera

$$\text{K}=-\frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}+\frac{(4x+p)^{\frac{1}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}\{4k(k+p)+(4x+p)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que, dans le cas présent, K va en diminuant sans cesse depuis la clef jusqu'aux impostes, tandis que c'est le contraire lorsque l'intrados est un demi-cercle.

Si nous avions cherché la relation entre x' et y', nous serions arrivés à une équation très-compliquée du quatrième degré. La figure 9 représente la voûte dont nous venons de trouver l'extrados.

M. Bossut (*Dynamique, Équilibre des Voûtes*), a donné à sa figure analogue plus d'épaisseur aux naissances qu'à la clef, tandis que ce devrait être le contraire. L'architecte du Panthéon français a commis la même erreur.

12. Voyons maintenant comment les équations (9 et 11) servent à trouver la loi des forces ou la loi des poids des voussoirs, quand on connaît la nature de l'intrados.

Supposons, par exemple, que les voussoirs ne soient soumis qu'à l'action de leur propre poids. Je fais $P=0$ dans l'équation (9), et intégrant, il vient $Q=\frac{cds^2}{Rdy^2}$. Pour déterminer C, supposons qu'à la clef où $ds=dy$, on ait $Q=q$, $R=r$, l'équation ci-dessus donnera $C=qr$, et l'on aura $Q=\frac{qrds^2}{Rdy^2}=\frac{qr}{ds}d\left(\frac{dx}{dy}\right)$; équation qui donnera la grandeur de la force Q qui sollicite chaque point de l'intrados, en y mettant pour $\frac{1}{ds}d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ sa valeur donnée par l'équation de l'intrados.

Si, par exemple, l'intrados est une demi-ellipse dont a soit la montée et b la demi-base, on trouvera $Q=\frac{qb^4}{(b^2-y^2)\sqrt{b^4-b^2y^2+a^2y^2}}$. Cette expression fait voir que les forces Q doivent augmenter depuis la clef jusqu'aux naissances où elles sont infinies.

Supposons actuellement les forces $Q=0$; l'équation (11) étant intégrée donne tout de suite $P=\frac{C}{R}$, et en déterminant C comme ci-dessus, on a $P=\frac{pr}{R}$ (p et r étant les valeurs de P et R à la clef) : ce résultat fait voir que les forces normales P doivent être en raison inverse des rayons de courbure. Dans le cas de l'ellipse ci-dessus, on trouve $P=\frac{pb^6}{(b^4+a^2y^2-b^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$; d'où l'on conclut que la pression à la clef est à celle des naissances comme a^3 est à b^3, et que dans le cercle elle doit être constante, résultat qui était connu.

SECTION III.

APPLICATION. *Trouver l'intrados quand on connaît la loi des forces ou l'extrados.*

13. Le problème de la section précédente est toujours algébrique et possible, quand même on n'aurait que l'équation différentielle

du premier ordre de l'intrados. Il n'en est pas de même du problème inverse qui fait l'objet de la présente section : sa solution exige toujours trois intégrations, comme on va le voir dans les exemples qui suivent.

Je vais chercher quelle est la courbe d'intrados quand l'épaisseur k de la voûte est infiniment petite. Alors on a $M = s$, et l'équation $M = C \tan \alpha$ du n° 2, en y mettant $\frac{dx}{dy}$ pour tang α, devient $Sdy = cdx$: c'est là l'équation de la courbe cherchée, qu'il ne s'agit plus que d'intégrer.

On peut la trouver encore très-simplement d'une autre manière. Supposer que le poids M est proportionnel à l'arc S, c'est la même chose que de faire constante la force Q qui presse chaque point de l'intrados. Si donc on fait $P = 0$, $Q = 1$ dans l'équation (9) du n° 4, et qu'on intègre, on aura $\frac{Rdy^2}{ds^2} = C$, qui, en y mettant pour R sa valeur $\frac{ds^3}{dy^2 . d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$, devient $ds = C . d\left(\frac{dx}{dy}\right)$; et en intégrant, on a, comme ci-dessus,

$$sdy = cdx \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

intégrale qui n'exige pas de nouvelle constante, parce qu'elle s'anéantit d'elle-même à la clef, où l'on a $s = 0$; $\frac{dx}{dy} = 0$.

Pour intégrer l'équation (a), j'y mets $\sqrt{ds^2 - dx^2}$ pour dy, et il vient $dx = \frac{sds}{\sqrt{s^2 + c^2}}$, dont l'intégrale est $R + C' = \sqrt{s^2 + c^2}$, ou $S = \sqrt{(x + c')^2 - c^2}$. Substituant cette valeur de S dans l'équation (a), il vient $dy = \frac{cdx}{\sqrt{(x + c')^2 - c^2}}$ dont on trouve que l'intégrale est

$$y = C'' - c \log \{x + C' - \sqrt{(x + c')^2 - c^2}\} \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

On détermine les trois constantes, en assujétissant la courbe à remplir trois conditions. Par exemple, si le point S doit être la clef, on doit avoir dans ce point $\frac{dx}{dy} = 0$ et $x = 0$; alors l'équation en dx et en dy donne $C = C'$. Si on veut ensuite que le point

point S soit l'origine des coordonnées, l'équation (14) devra donner $x=0$ et $y=0$, et on en tire $C''=C\log C$. Par ces substitutions, l'équation (14) devient

$$y=c\log\frac{c}{x+c-\sqrt{x^2+2cx}}=c\log\frac{x+c+\sqrt{x^2+2cx}}{c}\ldots\ldots(15)$$

Pour déterminer C, il faudra qu'en appelant a la montée et b la demi-base, l'équation (15) donne $y=b$ quand $x=a$: par là elle devient $b=c\log\frac{a+c+\sqrt{a^2+2ac}}{c}$; il faudra déterminer C par une espèce de tâtonnement.

Remarquons que l'équation (15) est celle d'une chaînette renversée, et que l'arc s est rectifiable, puisqu'on a $s=\sqrt{x^2+2cx}$.

Nous avons supposé que les deux impostes étaient à la même hauteur : si cela n'était pas, il suffirait d'imaginer la courbe prolongée du côté de l'imposte le plus bas. La clef serait toujours le point le plus élevé de la courbe, mais son axe se rapprocherait davantage de l'imposte le plus élevé. La détermination de C serait un peu différente, mais n'aurait rien de difficile.

A ne considérer que la solidité de la construction, la chaînette est sans contredit la courbe que l'on doit préférer pour les voûtes en berceau, puisque si les voussoirs y sont en équilibre, sans le secours du frottement et du ciment, cet équilibre s'affermira bien plus par le laps du temps. Il est vrai que, quelle que soit la courbe de l'intrados, on peut trouver, comme nous avons vu, un extrados qui procure aussi l'équilibre; mais la chaînette a seule l'avantage, comme nous le verrons, de comporter une épaisseur uniforme, en prenant cette épaisseur moitié en dehors, moitié en dedans.

L'architecte non géomètre peut, en fixant contre un mur les extrémités d'une corde lâche et flexible, tracer l'épure de la voûte. Voici les moyens plus exacts que la Géométrie présente.

a étant toujours la montée et b la demi-base, on calculera d'abord la valeur de la constante C, soit par le tâtonnement d'après la dernière équation, soit au moyen de la série suivante

$$\frac{1}{C}=\frac{2a}{b^2}-\frac{2a^3}{3b^4}+\frac{26a^5}{45b^6}-\frac{622a^7}{945b^8}$$

que l'on obtient en mettant l'équation sous forme exponentielle, réduisant en série les termes exponentiels, et déterminant C par la méthode du retour des suites.

Ayant trouvé C, on déterminera la longueur de la courbe par l'équation $SA = \sqrt{2ca + a^2}$ (fig. 10). Soit n le nombre des voussoirs, $\frac{SA}{n}$ sera l'arc de chacun d'eux. On fera successivement $s = \frac{SA}{n}$, $s = \frac{2SA}{n}$, $s = \frac{3SA}{n}$, etc. dans l'équation $x = -c + \sqrt{s^2 + c^2}$, et l'on aura les valeurs correspondantes de x, qui, étant substituées dans l'équation (15), donneront celles de y. Enfin, pour avoir la direction des joints, on calculera les valeurs correspondantes de chaque sous-normale PR ou z par l'équation

$$z = \frac{ydy}{dx} = \frac{cy}{s}.$$

J'ai placé ici une Table qui a pour objet d'épargner presque tous les calculs; elle donne les valeurs de s, x, y, z, dans la supposition de $c = 25$. Imaginons qu'on ait tracé sur un carton la chaînette représentée par cette Table, en commençant par les valeurs de x et de y; il suffira de prendre une portion plus ou moins grande de la courbe, pour avoir l'épure en petit de la voûte proposée.

Qu'on veuille, par exemple, faire une voûte dont la montée a soit de dix mètres, et la demi-base b de 8, on aura le modèle de cette voûte, en cherchant le point de la courbe pour lequel l'abscisse SP ou x est à l'ordonnée PM ou y dans le rapport de 10 à 8.

On verra facilement que cela a lieu dans la Table, lorsque $S = 80$, $x = 58, 81$, $y = 46, 99$. Si l'on prend donc au lieu du rapport de dix à huit, celui très-approchant de 58, 81 à 46, 99 pour le rapport de la montée à la demi-base; l'arc SA sera partagé en 80 voussoirs égaux, et la Table présentera les calculs tout faits pour les 80 voussoirs : on pourra les réduire à 40 ou 20 ou 10. Il est aisé de voir comment il faut se conduire dans tous les autres cas. On pourra, pour simplifier, multiplier tous les nombres de la Table par $\frac{8}{49,99}$, ou 0,1702, et construire ensuite la courbe; alors la demi-base sera 8, et la montée 10,01.

Si l'on veut avoir le C qui convient à la chaînette demandée, il suffit de prendre pour a et b le premier x et le premier y de la Table corrigée, et d'en substituer les valeurs dans l'équation $\frac{1}{C} = \frac{2a}{b^2}$ — etc. dont le premier terme suffit, à cause de la petitesse de la première valeur de x. On verra que cela revient à multiplier le C de la Table, ou 25 par $\frac{8}{46,99}$, ce qui donne 4,255.

Si on ne trouvait pas dans la Table un rapport assez approché de celui qu'on veut établir entre la montée et sa demi-base, on pourrait intercaler d'autres termes entre ceux de la Table, et approcher de plus près du rapport donné; mais cela sera presque toujours superflu. (*Voyez* n° 32.)

Table des rapports entre l'arc SM = s, l'abscisse SP = x, l'ordonnée PM = y, la sous-normale PR = z, pour la chaînette ordinaire dont C = 25.

s	y	x	z	s	y	x	z
1	1,00	0,02	25,00	26	22,73	11,08	21,86
2	2,00	0,08	24,97	27	23,42	11,80	21,68
3	2,99	0,18	24,94	28	24,09	12,54	21,51
4	3,99	0,32	24,91	29	24,76	13,29	21,34
5	4,97	0,50	24,86	30	25,40	14,05	21,17
6	5,95	0,71	24,79	31	26,04	14,83	21,00
7	6,92	0,96	24,71	32	26,66	15,61	20,83
8	7,87	1,25	24,60	33	27,27	16,41	20,66
9	8,82	1,57	24,50	34	27,87	17,21	20,49
10	9,75	1,93	24,37	35	28,45	18,02	20,33
11	10,67	2,31	24,25	36	29,03	18,83	20,16
12	11,58	2,73	24,12	37	29,59	19,66	20,00
13	12,47	3,18	23,98	38	30,14	20,49	19,83
14	13,36	3,65	23,86	39	30,68	21,33	19,67
15	14,23	4,16	23,72	40	31,22	22,17	19,51
16	15,07	4,68	23,55	41	31,74	23,02	19,36
17	15,90	5,23	23,38	42	32,26	23,88	19,20
18	16,72	5,81	23,22	43	32,77	24,74	19,05
19	17,52	6,40	23,05	44	33,27	25,61	18,90
20	18,31	7,01	22,89	45	33,76	26,48	18,75
21	19,08	7,65	22,72	46	34,24	27,36	18,61
22	19,84	8,31	22,55	47	34,71	28,24	18,46
23	20,59	8,98	22,38	48	35,18	29,12	18,32
24	21,32	9,66	22,21	49	35,64	30,01	18,18
25	22,03	10,36	22,03	50	36,09	30,90	18,05

Suite de la Table.

s	y	x	z	s	y	x	z
51	36,53	31,80	17,91	76	45,77	55,01	15,06
52	36,97	32,70	17,77	77	46,08	55,96	14,96
53	37,40	33,60	17,64	78	46,39	56,91	14,87
54	37,82	34,51	17,51	79	46,69	57,86	14,77
55	38,24	35,42	17,38	80	46,99	58,81	14,68
56	38,65	36,33	17,25	81	47,29	59,77	14,59
57	39,06	37,24	17,13	82	47,58	60,72	14,50
58	39,46	38,16	17,01	83	47,87	61,68	14,42
59	39,85	39,08	16,89	84	48,16	62,64	14,33
60	40,24	40,00	16,77	85	48,44	63,60	14,25
61	40,62	40,93	16,65	86	48,73	64,56	14,16
62	40,99	41,85	16,53	87	49,00	65,52	14,08
63	41,36	42,78	16,42	88	49,28	66,48	14,00
64	41,73	43,71	16,30	89	49,55	67,44	13,92
65	42,09	44,65	16,19	90	49,82	68,41	13,84
66	42,45	45,58	16,08	91	50,09	69,37	13,76
67	42,80	46,51	15,97	92	50,35	70,34	13,68
68	43,15	47,45	15,86	93	50,61	71,30	13,60
69	43,49	48,39	15,76	94	50,87	72,27	13,53
70	43,83	49,33	15,65	95	51,13	73,24	13,45
71	44,17	50,28	15,55	96	51,38	74,20	13,38
72	44,50	51,22	15,45	97	51,63	75,17	13,31
73	44,82	52,17	15,35	98	51,88	76,14	13,23
74	45,14	53,11	15,25	99	52,13	77,11	13,16
75	45,46	54,06	15,16	100	52,37	78,08	13,09

Suite de la Table.

s	y	x	z	s	y	x	z
101	52,61	79,05	13,02	126	58,00	103,45	11,51
102	52,85	80,02	12,95	127	58,20	104,42	11,46
103	53,09	81,00	12,89	128	58,59	105,42	11,41
104	53,32	81,97	12,82	129	58,58	106,40	11,36
105	53,55	82,94	12,75	130	58,77	107,38	11,30
106	53,78	83,91	12,69	131	58,96	108,35	11,25
107	54,01	84,89	12,62	132	59,15	109,35	11,20
108	54,24	85,86	12,56	133	59,34	110,33	11,15
109	54,47	86,83	12,50	134	59,52	111,31	11,10
110	54,69	87,81	12,43	135	59,71	112,28	11,06
111	54,91	88,78	12,37	136	59,89	113,28	11,01
112	55,13	89,76	12,31	137	60,07	114,26	10,96
113	55,35	90,73	12,25	138	60,25	115,25	10,91
114	55,56	91,71	12,19	139	60,45	116,23	10,87
115	55,77	92,68	12,13	140	60,60	117,22	10,82
116	55,98	93,66	12,07	141	60,77	118,20	10,77
117	56,19	94,64	12,01	142	60,95	119,18	10,73
118	56,39	95,62	11,95	143	61,12	120,15	10,68
119	56,60	96,59	11,90	144	61,29	121,15	10,64
120	56,80	97,57	11,84	145	61,46	122,14	10,59
121	57,00	98,55	11,78	146	61,63	123,12	10,55
122	57,21	99,53	11,73	147	61,79	124,11	10,50
123	57,41	100,51	11,67	148	61,96	125,10	10,46
124	57,61	101,49	11,62	149	62,12	126,09	10,42
125	57,81	102,47	11,57	150	62,29	127,08	10,38

14. Après avoir tracé la chaînette, il restera à déterminer l'extrados : deux partis se présentent : si on le calcule d'après l'équation (6) du n° 2, l'épaisseur de la voûte ira toujours en augmentant depuis la clef, quoique peu sensiblement, ainsi qu'on le verra ci-après ; en revanche, la poussée sera un peu moins considérable.

Le second moyen consiste à tracer en dehors et en dedans de la chaînette, à la distance $\frac{1}{2}k$ moitié de l'épaisseur, deux courbes parallèles à la chaînette. Ces courbes ne sont point des chaînettes, quoiqu'elles aient la même développée qu'elles : elles remplissent néanmoins la condition d'équilibre, car il est aisé de sentir qu'en prenant des arcs égaux sur la chaînette intermédiaire, tous les voussoirs seront égaux en surface, quoique les trapèzes dont ils sont formés soient de figure différente. Le poids de chaque voussoir sera donc proportionnel à l'arc de chaînette, et la condition d'équilibre sera remplie. Il est vrai que la chaînette ne passera pas par les centres de gravité des voussoirs, mais cela n'est pas nécessaire pour l'équilibre, parce que les joints ont une grandeur finie.

On peut remarquer que les intervalles des joints iront un peu en augmentant depuis la clef, sur l'intrados, et en diminuant sur l'extrados. Rien n'empêcherait de faire les intervalles égaux sur l'extrados ; mais alors le poids des voussoirs irait un peu en augmentant depuis la clef, ce qui au reste ne nuirait pas à l'équilibre.

Je vais chercher la grandeur K des joints, par l'équation (6) du n° 2, pour le cas où l'on voudrait que l'intrados fût une chaînette.

On a ici $ds = \frac{(x+c)\,dx}{\sqrt{x^2+2cx}}$; $dy = \frac{c\,dx}{\sqrt{x^2+2cx}}$, et l'on trouve $R = \frac{(x+c)^2}{c}$, d'où pour la clef, $r=c$. Substituant ces valeurs dans l'équation (6) qui est $K = -R + \sqrt{\frac{(k^2+2rK)\,ds^2}{dy^2} + R^2}$, on a

$$K = -\frac{(x+c)^2}{c} + \frac{(x+c)}{c}\sqrt{k(k+2c)+(x+c)^2}.$$

Si on développe en série le radical de l'expression de K, et qu'ensuite on fasse x infinie, on trouve pour K la quantité finie

$K = k + \frac{k^2}{2c}$, qui fait voir que la grandeur K des joints va en augmentant depuis la clef où elle est k. On voit en même temps que dans la pratique, lorsque l'intrados est une chaînette, on ne peut donner une épaisseur uniforme à la voûte que dans le cas où $\frac{k^2}{2c}$ est très-petit, résultat qui n'a pas encore été remarqué, du moins que je sache.

Ce résultat peut encore se démontrer ainsi qu'il suit : La surface du voussoir qui est à l'extrémité infinie de la chaînette est Kds; la surface de celui qui est à la clef, est (en observant qu'en ce point $R = c$) $\frac{kds}{2c}(k + 2c)$. Or dans la chaînette, l'équilibre exige que ces deux voussoirs soient égaux en surface; en les égalant, on trouve, comme ci-dessus, $K = k + \frac{k^2}{2c}$.

15. *Trouver l'intrados qui a son extrados parallèle.* Il suffit pour résoudre ce problème, d'intégrer l'équation

$$K = -R + \sqrt{\frac{cds^2}{dy^2} + R^2},$$

en considérant K comme une constante égale à k. Pour cela, je la mets sous cette forme $k^2 + 2Rk = \frac{cds^2}{dy^2}$. Je mets pour R son expression $-\frac{dxds}{d^2y}$, dans laquelle ds est constant, et j'ai

$$k^2d^2y - 2\,kdxds = \frac{cds^2d^2y}{dy^2},$$

dont l'intégrale est

$$k^2dy - 2kxds = -\frac{cds^2}{dy} + c'ds,\ \text{ou}\ k^2dy^2 + cds^2 - (2kx + c)dsdy = 0.$$

On peut dès-à-présent déterminer c', en observant qu'à la clef, on doit avoir $x = 0$ et $dy = ds$: cette condition donne $c' = k^2 + c$.

Pour intégrer de nouveau, je mets pour ds, sa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$: je fais ensuite $dx = pdy$, et j'ai la transformée

$$C' + cp^2 - (2kx + c')\sqrt{1 + p^2} = 0,\ \text{ou}\ x = \frac{c' + cp^2}{2k\sqrt{1 + p^2}} - \frac{c'}{2k} \ldots\ldots (a)$$

Je

Je reprends l'équation $dx = pdy$ ou $dy = \frac{dx}{p}$, dont l'intégrale est $y = \frac{x}{p} + \int \frac{xdp}{p^2}$. Substituant pour x sa valeur et intégrant, on a, toutes réductions faites,

$$y = -\frac{kp}{2\sqrt{1+p^2}} + \frac{c}{2k}\log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

équation à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter, puisqu'elle donne $y = 0$ quand $p = 0$, comme cela doit être à la clef.

On déterminera la constante C, par la condition que l'équation donne $x = a$ quand $y = b$.

On construira la courbe au moyen des équations (a et b), et son extrados au moyen de l'équation (6) du n° 2, qui donnera $K = k$. Si on fait k infiniment petit dans les calculs précédens, on retrouvera la chaînette, comme cela doit être.

On peut se convaincre que l'intrados et l'extrados du présent problème, ne sont autre chose que les deux courbes parallèles menées à la distance $\frac{1}{2}k$ d'une chaînette intermédiaire.

16. Soit SA la demi-arche d'un pont qui doit être chargée de terre jusqu'à l'horizontale S'Q : on demande quelle doit être la courbure de l'intrados SA pour l'équilibre.

(Fig. 11.) Chaque élément Mm ou ds est poussé verticalement par un poids proportionnel au rectangle MmqQ supposé homogène, dont l'expression, en faisant $SS' = k$, est $(x + k)dy$. La force Q qui agit sur chaque point de Mm, est donc ici $(x + k)\frac{dy}{ds}$, et l'on a d'ailleurs $P = 0$. L'équation (9) du n° 4 se réduit à $d\left(\frac{QRdy^2}{ds^2}\right) = 0$: intégrant, on a $\frac{QRdy^2}{ds^2} = c^2$: mettant pour Q sa valeur et pour R son expression $\frac{dxds}{-d^2y}$, il vient $(x + k)\,dx = -\frac{c^2ds^2d^2y}{dy^3}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}x^2 + kx + c'^2 = \frac{c^2ds^2}{2dy^2}$: faisant attention qu'à la clef on doit avoir $x = 0$; $ds = dy$, on en conclut $2c'^2 = c^2$; et l'équation ci-dessus devient, en mettant pour ds^2 sa valeur

$dx^2 + dy^2$, $dy = \frac{cdx}{\sqrt{x^2+2kx}}$, dont on trouve que l'intégrale est $y + c' = c \log(x + k + \sqrt{x^2+2kx})$. On détermine c', en observant qu'on doit avoir en même temps $x = 0$; $y = 0$; ce qui donne $c' = c \log k$, d'où il vient

$$y = c \log \frac{x+k+\sqrt{x^2+2kx}}{k} \dots\dots\dots\dots\dots (c)$$

On détermine c en assujétissant la courbe à passer par la naissance A, où $x = a$ et $y = b$, ce qui donne $c = \frac{b}{\log \frac{a+k+\sqrt{a^2+2ak}}{k}}$.

En mettant l'équation (c) sous cette forme

$$\frac{k}{c} y = k \log \frac{x+k+\sqrt{x^2+2kx}}{k},$$

et en se rappelant que dans la chaînette le rayon de courbure est k lorsque l'équation est $y' = k \log \frac{x+k+\sqrt{x^2+2kx}}{k}$, on reconnaîtra aisément que si on construit la chaînette représentée par cette dernière équation, et qu'on multiplie toutes ses ordonnées y' par le rapport $\frac{c}{k}$, on aura les ordonnées y de la courbe cherchée SA. M. Bossut s'est occupé du présent problème (*Dynamique*, Recherches sur l'équilibre des voûtes, nº 10); il a fait une méprise manifeste, en supposant que la force verticale qui agit sur chaque point de la courbe est $x + k$, tandis qu'elle est $(x+k)\frac{dy}{ds}$. L'équation qu'il a obtenue n'appartient pas au problème présent; elle donne la courbure d'une corde qui porterait en chacun de ses points un poids proportionnel à $(x+k)$. On peut remarquer en passant combien nos équations (9 et 11) sont plus simples et plus commodes pour l'intégration que la formule employée par M. Bossut.

Pour obtenir l'équation à laquelle est arrivé ce géomètre, il faut intégrer trois fois l'équation $d\left(\frac{QRdy^2}{ds^2}\right) = 0$: on a d'abord $(x+k)\,dx = -\frac{cdsd^2y}{dy^2}$; puis $\frac{1}{2}x^2 + kx + c' = \frac{cds}{dy}$: on trouve

$c' = c$, et l'on arrive à l'équation $dy = \frac{cdx}{\sqrt{(\frac{1}{2}x^2+kx)^2+2c(\frac{1}{2}x^2+kx)}}$, équation qui revient au même que celle de Bossut.

17. Examinons le cas où l'on aurait $Q = 0$ et $P = f(x)$: ce cas aurait lieu, si la voûte devait être chargée d'un fluide pesant, ou même d'un sable très-mobile ; parce qu'alors le poids du liquide agit perpendiculairement à l'extrados, et proportionnellement à la hauteur de la colonne du fluide au-dessus du point pressé.

Faisant $Q = 0$; $P = f(x)$ dans l'équation (11) du n° 6, et intégrant, on a $f(x) = \frac{C}{R}$: multipliant par dx, et mettant $\frac{dxds}{-d^2y}$ pour R, il vient $dx . f(x) = -\frac{cd^2y}{ds}$ dont l'intégrale est $\int dx . f(x) = c' - \frac{cdy}{ds}$, d'où, en mettant pour ds sa valeur, on tire

$$dy = \frac{dx\{c' - \int dx . f(x)\}}{\sqrt{c^2 - \{c' - \int dx . f(x)\}^2}}.$$

La hauteur de la colonne du fluide est ici $x + k = f(x)$; de plus, l'équation doit donner $x = 0$ quand $\frac{dx}{dy} = 0$, ou quand $dy = ds$, d'où l'on tire $c' = c$. Faisant ces substitutions, la dernière équation devient

$$dy = \frac{dx(2c - 2kx - x^2)}{\sqrt{4c^2 - (2c - 2kx - x^2)^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

qui appartient à la courbe appelée *élastique*, et qui s'intègre par des arcs de sections coniques.

On peut remarquer que si on a k infini dans l'équation (d), elle devient intégrable, et donne un cercle dont le centre est sur la montée ; car alors le terme $-x^2$ s'anéantit vis-à-vis du terme $-2kx$.

Remarquons encore que l'élastique trouvée est la courbe que prend un linge chargé d'un fluide ; car alors le linge remplace l'intrados, et la pression qui se faisait de dehors en dedans dans le cas de la voûte, agit ici de dedans en dehors.

18. Voici un exemple un peu plus composé, et qui renferme à-la-fois les deux précédens.

Je suppose que P et Q sont tous deux des fonctions de x et de constantes. Je prends l'équation (11) du nº 6, qui étant intégrée, devient $PR+\frac{QRdy}{ds}-\int Qdx=c$. Mettant pour R sa valeur $\frac{dxds}{-d^2y}$ dans l'hypothèse de ds constant, et multipliant tout par $-d^2y$, il vient

$$Pdxds+Qdxdy+d^2y\int Qdx=-cd^2y,$$

dont l'intégrale est

$$ds\int Pdx+dy\int Qdx=-cdy+c'ds.$$

Mettant pour ds sa valeur, il vient

$$dy=\frac{dx(-\int Pdx+c')}{\sqrt{(c+\int Qdx)^2-(c'-\int Pdx)^2}}\ldots\ldots\ldots(e)$$

Supposons, pour faire une application, que les voussoirs aient une épaisseur partout égale, et qu'ils soient chargés d'un fluide dont la hauteur SS′ (fig. 11) au-dessus de la clef soit k : nous pourrons supposer, pour plus de simplicité, que l'épaisseur des voussoirs en pierres soit représentée par une épaisseur g du fluide ; g vaudra 2 ou 3 ou 4, etc., si la densité de la pierre est 2 fois, 3 fois, 4 fois celle du fluide. On aura $Q=g$; $P=x+k$; $\int Qdx=gx$; $\int Pdx=\frac{1}{2}x^2+kx$. Substituant ces valeurs dans l'équation (e), et déterminant c' par la condition que l'on ait à-la-fois $x=0$ et $\frac{dx}{dy}=0$, ce qui donne $c'=c$, on aura

$$dy=\frac{dx(2c-2kx-x^2)}{\sqrt{4(c+gx)^2-(2c-2kx-x^2)^2}},$$

équation qui s'intégrera soit par les séries, soit par la rectification des sections coniques, et dont on déterminera la constante c, ainsi que la nouvelle constante introduite par la dernière intégration, par les conditions qu'on ait à la clef $x=0$, $y=0$, et aux naissances $x=a$, $y=b$.

19. *Intrados qui a une ligne droite pour extrados.* Après avoir parcouru quelques exemples dans lesquels il s'agissait de trouver l'intrados par la connaissance de la loi des forces, je vais en donner un dans lequel on connaît, non la loi des forces, mais la courbe

d'extrados. Le problème revient au même dans le fond, mais il se présente sous un aspect différent.

On veut faire un pont ou berceau dont l'extrados qui représente le chemin soit une ligne droite horizontale, et dont les voussoirs occupent tout l'espace compris entre l'extrados et l'intrados. On demande la courbe d'intrados (fig. 12).

Je prends les équations (7 et 8) du n° 3, auxquelles il faut joindre celle de l'extrados $y' = f(x')$, qu'on verra être $\beta y' = x' + k$ (si pour plus de généralité on suppose que la ligne droite de l'extrados doive faire avec l'horizon un angle dont la tangente soit β). Je substitue pour x' sa valeur $\beta y' - k$, dans l'équation (7), de laquelle ayant tiré celle de y', je la substitue dans l'équation (8) : je quarre celle-ci, et j'ai pour l'équation différentielle de la courbe cherchée, la suivante

$$\left(\frac{x+k-\beta y}{dy+\beta dx}\right)^2 ds^2 + 2\text{R}ds\,\frac{x+k-\beta y}{dy+\beta dx} = \frac{cds^2}{dy^2}.$$

Je me bornerai pour l'intégration au cas où la ligne droite de l'extrados doit être horizontale : alors on a $\beta = 0$, et l'équation se réduit à $(x+k)^2 ds + 2\text{R}\,(x+k)\,dy = cds$.

Mettant pour R sa valeur $-\frac{dxds}{d^2y}$, dans laquelle ds est constant, il vient $\frac{d^2y}{dy} - \frac{2dx\,(x+k)}{(x+k)^2-c} = 0$, dont l'intégrale est

$$\log dy - \log\{(x+k)^2 - c\} = \log c'.ds\,;$$

d'où l'on tire

$$dy = c'ds\,\{(x+k)^2 - c\}.$$

Je détermine c' en observant qu'à la clef on doit avoir, à-la-fois, $x = 0$ et $dy = ds$, ce qui donne $c' = \frac{1}{k^2-c}$. Substituant pour ds sa valeur $\sqrt{dx^2+dy^2}$, on a finalement

$$dy = \frac{dx\,\{(x+k)^2-c\}}{\sqrt{(k^2-c)^2 - \{(x+k)^2-c\}^2}} \;\ldots\ldots\ldots (f)\,:$$

équation qui appartient à la courbe élastique. Il n'est pas douteux que les ingénieurs devraient adopter cette courbe pour les ponts ; elle leur procurerait plus de solidité, et autant d'élégance que celles en usage.

CHAPITRE II.

DE LA POUSSÉE DES BERCEAUX, ET DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LA VOÛTE ET LES PIEDS-DROITS.

SECTION PREMIÈRE.

Notions préliminaires.

20. *Réflexions.* DANS le chapitre précédent, nous avons déterminé les conditions d'équilibre entre les voussoirs d'une voûte en berceau; nous avons appris à déterminer l'intrados quand on connaît l'extrados, et *vice versâ.* Il reste à mettre en équilibre la voûte elle-même avec les pieds-droits qu'elle tend à renverser ou à faire glisser sur la plate-forme qui les supporte.

Ce second problème n'admet pas de solution rigoureuse, parce qu'on ne connaît pas au juste la manière dont les voussoirs agissent les uns sur les autres; je m'explique: si les voussoirs étaient sans frottement, et équilibrés entre eux d'après les principes du chapitre premier, on pourrait par la théorie seule évaluer l'effort que la voûte exerce pour écarter les pieds-droits : il est rare que les voûtes soient construites d'après les principes de l'équilibre; les voussoirs ne se contrebalancent point, le frottement seul empêche que quelques-uns d'eux ne soient expulsés de leur place par un mouvement de dedans en dehors. Le défaut d'équilibre tend à produire un autre mouvement auquel le frottement ne s'oppose point. Certains voussoirs tendent à tourner sur leurs voisins, comme s'ils étaient

liés par une charnière. Cette rotation se fait à l'intrados pour les uns, et à l'extrados pour les autres ; ensorte que la voûte s'ouvre en plusieurs points de l'intrados et de l'extrados. Ces mouvemens de rotation se remarquent très-facilement dans une voûte en petit, faite soit avec du bois, soit avec du plâtre. Ils renverseraient presque toutes les voûtes sans l'adhérence produite par le mortier : cette force tient les voussoirs, pour ainsi dire, collés les uns sur les autres.

On sent que ces deux espèces de force, le frottement et l'adhérence, sont presque impossibles à évaluer ; leurs effets varient à l'infini, non-seulement suivant leur intensité, mais encore suivant la figure de la voûte. La poussée horizontale qui tend à renverser les pieds-droits, est la résultante de toutes les forces ou de toutes les résistances qui agissent sur les voussoirs. Il résulte de là que le problème de la poussée n'admet qu'une solution approchée, puisqu'il dépend de l'arbitraire des données qu'on y fait entrer, et de plusieurs circonstances physiques impossibles à évaluer. Je rapporterai les différentes hypothèses imaginées jusqu'à ce jour ; je les discuterai pour tâcher de distinguer les cas où chacune d'elles est préférable ; je ferai voir qu'elles sont erronées, faute d'avoir apprécié convenablement les effets du frottement. Pour cela, je commencerai par examiner quelques cas d'équilibre, dans lesquels le frottement produit des effets qui paraissent des phénomènes contraires aux lois de la statique.

21. *Effets du frottement.* EFF'E' (fig. 13) est un corps ou coin pesant qui repose entre les faces inclinées EF, E'F', de deux massifs EFBCD, E'F'B'C'D', lesquels peuvent glisser sur les plans horizontaux CD, C'D', et tourner autour des points C et C' : on demande les conditions tant de l'équilibre de rotation autour des points C et C', que du non-glissement des deux massifs, en ayant égard au frottement.

Soit $CD = Z_1$; $ED = H_1$, α l'angle formé par la verticale avec la face EF du coin ; $2M =$ poids du coin ; $N =$ poids du massif, $\frac{\pi}{1} = \frac{\text{frottement}}{\text{pression}}$, ou, en appelant θ, l'angle du frottement $\pi = \text{tang}\, \theta$.

Soient R et R' les points par lesquels on suppose que le coin

touche les massifs ; je mène par ces points deux lignes faisant avec EF et EF' des angles qui soient complémens de θ : il est clair que si l'on applique en Q une force QR, elle ne glissera point contre la face EF, puisqu'elle fait avec cette face l'angle exigé par la grandeur du frottement. Par la même raison, si cette force est l'effet du coin, il n'y aura pas glissement contre la face du massif. Je décompose la force RQ en deux, l'une verticale RP, qui sera égale à la moitié M du poids du coin, l'autre RS, horizontale, qui tend à faire glisser le massif sur sa base : c'est cette force RS que j'appelle la poussée horizontale du coin, et qu'il s'agit de trouver.

En menant SI perpendiculaire sur EF, cette ligne représentera la pression que le coin exerce sur le massif, et RI représentera le frottement π : on aura $RQI=\theta$; $QRI=90°-\theta$; $PRI=\alpha$; $QRP=90°-\alpha-\theta$; $RP=M$: donc $RS=\text{tang}\,(90°-\theta-\alpha)\,M=M\cot(\alpha+\theta)$.

Telle est l'expression de la poussée horizontale que j'appellerai F, et qu'on peut mettre sous une autre forme, en y mettant π pour tang θ.

$$F = M\cot(\alpha+\theta) = M\,\frac{1-\pi\,\text{tang}\,\alpha}{\pi+\text{tang}\,\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Pour avoir l'équation de l'équilibre de rotation autour du point C, il faut remarquer que la poussée F tend seule à renverser le massif, et que deux autres M et N tendent à le faire tourner en sens contraire : il suffit d'égaler le moment de la première à la somme de ceux des deux autres.

Pour avoir la condition de non glissement du massif sur sa base, il suffit de vérifier si la poussée est plus petite que les deux poids qui pressent la base, multipliés par le rapport du frottement de cette base à la pression. Cela posé, on verra aisément que les deux équations ou formules d'équilibre tant de rotation que du non-glissement des massifs, sont :

$$\left.\begin{array}{l} FH_1 = MZ_1 + NG \\ F < \pi\,(M+N) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

en appelant G la distance du point C à la verticale passant par le centre de gravité du massif ; j'ai supposé que le massif, en tournant, glissait par son angle E sur la face du coin, ce qui en effet ne peut pas arriver différemment.

Il faut bien faire attention que les deux équations (17) sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'elles peuvent avoir lieu l'une sans l'autre : la première concerne le mouvement de rotation, et la seconde le mouvement de translation, deux choses très-distinctes ; et en effet on sent bien que le massif peut tourner sans glisser, ou glisser sans tourner.

La ligne RQ fait avec EF le plus petit angle QRI que puisse comporter le frottement, c'est-à-dire, que si cet angle était plus petit, la force QR glisserait sur EF ; mais si cet angle était plus grand, la force ne glisserait plus : seulement il arriverait qu'elle augmenterait de grandeur ainsi que la poussée, d'autant plus que l'angle QRI serait plus grand. Il suit de là qu'on aurait autant d'expressions différentes de la poussée qu'on voudrait, en prenant l'angle QRI plus grand que le complément de θ. Pour lever l'incertitude, il suffit de se rappeler de ce principe, que la pesanteur tend toujours à produire soit un *maximum*, soit un *minimum* : ici, elle choisit parmi tous les angles QRI plus grands que $90° - \theta$, celui qui exige la plus petite force Q pour soutenir le coin, et θ est un *maximum*.

Au reste, comme il est très-aisé de faire des méprises et d'arriver à plusieurs solutions très-différentes par le principe de la décomposition des forces, quoique ce problème paraisse très-simple, je vais donner une autre solution qui conduit au même résultat.

Soit P la pression inconnue que le coin exerce perpendiculairement en R et en R'; le frottement qui est proportionnel à cette pression sera πP. Imaginons en F un fil attaché au pied-droit ou massif, et fixé par l'autre bout en un point quelconque de la face du coin. Imaginons, de plus, que ce fil éprouve une tension $= \pi P$; cette tension remplacera l'effet du frottement.

Si l'on prolonge les directions des deux fils jusqu'en O, et qu'on les compose, il en résultera une force $OO' = 2\pi P \cos \alpha$: cette force dirigée de bas en haut, réduit le poids 2M du coin à $2M - 2\pi P \cos\alpha$: si l'on cherche la pression perpendiculaire, ainsi que la poussée horizontale que cette force produit en R, on trouvera que la pression est $\frac{M - \pi P \cos\alpha}{\sin\alpha}$, et que la poussée est $\cot\alpha\,(M - \pi P \cos\alpha)$.

Mais il reste une force dont nous n'avons pas encore tenu compte,

c'est l'effet de la tension du cordon sur le point F; la réaction de cette tension y produit, dans le sens BF, une force horizontale opposée à la poussée; son expression est $\pi P \sin\alpha$: ainsi la poussée est $\cot\alpha\,(M - \pi P \sin\alpha) - \pi P \sin\alpha$.

Il reste à trouver la valeur de P pour la mettre dans l'expression de la poussée : or nous avons trouvé ci-dessus la pression $P = \frac{M - \pi P \cos\alpha}{\sin\alpha}$, on en tire $P = \frac{M}{\sin\alpha + \pi \cos\alpha}$. Substituant cette valeur de P dans l'expression trouvée ci-dessus pour la poussée, on a poussée $= F = M \cot\alpha - \frac{\pi M}{\sin^2\alpha + \pi \sin\alpha \cos\alpha}$, expression qu'on ramène aisément à celle de l'équation (16).

Les figures (14, 15, 16, 17, 18) sont des cas particuliers du même problème. Pour simplifier les figures, j'ai remplacé les massifs par une verge pesante CR : on voit toujours la direction RQ, suivant laquelle le corps supérieur ou coin agit contre la verge. Cette ligne RQ fait toujours le plus grand angle RQI que puisse admettre le frottement. Dans la fig. 14, les faces du coin sont parallèles et verticales, et sans le frottement, aucune verge, si pesante qu'elle fût, ne pourrait le soutenir. Dans la fig. 15, les faces du coin sont perpendiculaires sur les verges.

Dans la figure 16, la même face horizontale repose sur les verges.

Dans les figures 17 et 18, l'effet du frottement est encore plus remarquable; il tend à rapprocher les verges en les faisant glisser en C l'une vers l'autre, tandis que dans les cas précédens, elles tendaient à s'éloigner. Ici le point T d'application de la pesanteur sur le corps supérieur doit être pris en-dessous, et il faut substituer à la pesanteur représentée par T*t* les deux forces TK, TK′.

Enfin dans la figure 19, les verges qui ne peuvent que tourner autour des points C et C′, y sont attachées, et tiennent par leur poids le coin suspendu en-dessous des points d'appui; ce cas diffère des précédens, en ce que la pression qui a lieu en R est ici produite par les verges, tandis qu'auparavant elle était l'effet du coin. Les formules 16 et 17 n'ont plus lieu pour le cas de la figure 19. On sent que quand les verges CR, C′R′, deviennent verticales, l'équilibre est impossible, parce qu'il n'y a plus de pression en R.

Pour compléter le problème, je vais chercher la formule qui convient au cas particulier d'équilibre représenté par la figure 19. Il faut concevoir que la partie du poids de la verge CR, qui agit en R, soit représentée par une ligne verticale passant par ce point; et qu'on ait décomposé cette force en deux autres, l'une qui tire suivant la verge (laquelle je n'ai point marquée dans la figure pour ne pas la compliquer); l'autre RQ, qui fait avec la face du coin le plus petit angle RQI que permette le frottement : cette force RQ se décompose en deux autres, l'une $RP = M$, laquelle porte le poids du coin; l'autre, RS, qui, en réagissant contre la verge, opère la poussée horizontale du coin. Soit $IRP = \alpha$, $RQI = \theta$, on a $QRP = 90° - (\theta - \alpha)$, d'où l'on tire aisément

$$RS = QP = RP \text{ tang } QRP, \text{ et } RS = F = M \cot(\theta - \alpha);$$

et en appelant $CD = Z_1$, $RD = H_1$, $G =$ distance du point C à la verticale passant par le centre d'inertie de la verge, on a pour l'équation d'équilibre, $FH_1 = MZ_1 + NG$.

Pression normale. La pression normale qui a lieu au point de contact R, est encore utile à considérer : c'est par elle qu'on juge si les matériaux peuvent la supporter sans s'écraser : on a fait pour cela des expériences qui font connaître quelle charge chaque espèce de pierre peut soutenir avant d'en être brisée. La pression peut provenir ou du coin ou du corps qui presse le coin. Voyons d'abord le premier cas.

Si le coin repose sur deux plans fixes, la pression normale est, comme nous l'avons trouvée, $P = \frac{M}{\sin\alpha + \pi \cos\alpha}$: on peut encore déduire cette même valeur de la ligne QI (fig. 13); car le triangle RQP donne $\overline{QR}^2 = M^2 + F^2$, et le triangle QRI donne $\overline{QR}^2 = P^2 + \pi^2 P^2$, d'où l'on déduit aisément la valeur ci-dessus de P. Si le coin est un peu trop pesant ou la verge trop faible, l'équilibre est détruit, et le coin chasse les corps adjacens.

Mais si les corps adjacens sont plus pesans que l'exige l'équation d'équilibre, ils tendent à faire remonter le coin, et le frottement seul s'y oppose. La pression devient plus grande qu'elle ne l'était dans l'état d'équilibre : elle n'est plus produite par le coin, mais

par les corps adjacens : ce n'est plus l'équilibre qui a lieu ; c'est une stabilité plus grande.

Soit (fig. 13*) $CD = Z_1$, $RD = H_1$, angle $C = \gamma$: je décompose le poids N de la verge en deux, l'un agissant en C, l'autre agissant en R ; ce dernier est $\frac{NG}{Z_1} = Rp$: je décompose cette force en deux, l'une Rq, qui sera détruite en C ; l'autre Rr, perpendiculaire à la face du coin, et que j'appelle P′.

Dans le triangle Rpr on a $Rpr = 90° - \gamma$, $Rrp = \gamma - \alpha$; $Rp = \frac{NG}{Z_1}$, d'où l'on tire aisément

$$P' = \frac{NG\cos\gamma}{Z_1 \sin(\gamma - \alpha)} = \frac{NG}{H_1 \cos\alpha - Z_1 \sin\alpha},$$

(en observant que $\tang \gamma = \frac{H_1}{Z_1}$).

Pour s'assurer si c'est P ou P′ qui a lieu en R, il ne faut que vérifier laquelle est la plus grande. Mais si (fig. 13) le corps N est un autre coin, par exemple un voussoir, la pression qui aura lieu en R, ne pourra pas être trouvée par la formule précédente : nous verrons ailleurs comment il faut s'y prendre.

SECTION II.

Différentes hypothèses sur la poussée.

22. *Hypothèse du coin de la Hire.* Je commencerai par rapporter les différentes hypothèses imaginées sur la poussée ; je les discuterai ensuite, pour savoir laquelle on doit préférer dans chaque cas. Celle qui fait l'objet de ce n°, a été donnée par M. de la Hire.

On suppose dans cette hypothèse, que la voûte tend à se rompre dans les joints symétriquement placés EF, E′F′ (fig. 20), et que les deux portions de voûte EF*a*A, E′F′*a*′A′ demeurent adhérentes aux pieds-droits par l'effet du ciment : alors la partie du milieu EFF′E′, fait l'effet d'un coin qui agit contre les plans EF, E′F′, pour faire tourner les pieds-droits autour des points fixes C et C′.

Soit TR une perpendiculaire élevée sur le milieu du joint EF, et rencontrant la montée en T : je prends $Tt = 2M$ = poids du coin EFF'E'; je décompose Tt en deux autres forces TK, TK', j'imagine TK appliqué au point R de sa direction, et ayant pris $Rr = TK$, je la décompose en deux, l'une Rs horizontale, l'autre Rx verticale.

Soit RR' la verticale passant par R, et GG' celle qui passe par le centre de gravité G de la portion de voûte EFaA : cela posé, soit prise la notation suivante.

$OA = b$, $OR' = q$, $OG' = D$, N = poids de l'espace EFaA, $RR' = h$, $AD = H$, $DC = Z$, α l'angle xRE, formé par le joint EF avec celui de la verticale; f la densité des matériaux des pieds-droits, celle de la voûte étant 1.

La force Rs tend à faire tourner le pied-droit autour du point C; c'est la poussée horizontale du coin : trois autres tendent à le faire tourner en sens contraire, savoir Rx, le poids N, et celui du pied-droit.

On a $Rr = TK = M \frac{1}{\sin\alpha}$, $Rs = M \cot\alpha$, $Rx = M$; poids du pied-droit $= f.H.Z$.

Le moment de la force Rs est $M \cot\alpha (H + h)$, celui de la force Rx est $M(b + Z - q)$; celui de l'aire EFaA est $N(b + Z - D)$, et celui du pied-droit est $\frac{1}{2} f H Z^2$.

Égalant le moment de la première force à la somme des trois autres, on aura l'équation suivante d'équilibre, qui fera connaître Z, si H est connu, et réciproquement

$$M \cot\alpha (H + h) = M(b + Z - q) + N(b + Z - D) + \tfrac{1}{2} f H Z^2 \ldots (18).$$

Quant à la valeur de l'angle α, c'est à l'expérience à la donner. On est en usage d'imaginer un rectangle formé par les lignes OA, OS et leurs parallèles : l'intersection de l'intrados par la diagonale de ce rectangle, détermine le point E : on sent combien cette règle est arbitraire.

Il ne suffit pas, pour que la voûte et les pieds-droits soient en repos, que l'équation (18) soit satisfaite; il faut encore que la voûte ne puisse pas glisser sur le pied-droit : cet effet, qui peut avoir lieu si le joint des naissances est horizontal, est empêché soit par le

ciment, soit par tout autre obstacle; il faut encore que le pied-droit ne glisse pas sur sa plate-forme. La force qui tend à produire cet effet est R*s*; celle qui s'y oppose est la somme des poids de la demi-voûte et du pied-droit, multipliée par le rapport π du frottement à la pression. Ainsi on a, pour exprimer qu'il n'y a pas de glissement du pied-droit, la condition suivante :

$$M \cot \alpha < \pi (M + N + f HZ) \ldots\ldots\ldots (19).$$

Il faut bien observer que les équations (18) et (19) peuvent avoir lieu l'une sans l'autre, et qu'elles sont indépendantes, c'est-à-dire qu'il peut y avoir rotation sans glissement, comme glissement sans rotation; il faut, pour le repos absolu du système, que les deux conditions existent à-la-fois.

Un savant Géomètre a fait entrer dans cette dernière question la considération de la force accélératrice de la pesanteur, qui est étrangère au sujet, quand on cherche l'équilibre entre des corps pesans qui ne sont animés d'aucun mouvement.

23. *Hypothèse de la rupture aux reins et à la clef.* On suppose ici que la voûte s'ouvre vers la clef à l'intrados, et vers les reins à l'extrados, comme on le voit en S, F, F′ (fig. 21) : les portions de voûte SS′FE et SS′F′E′, agissent comme deux arcs-boutans qui s'appuient l'un contre l'autre en S′, et poussent en E et E′, les autres parties de la voûte supposées adhérentes aux pieds-droits, pour les faire tourner autour des points fixes C et C′

Pour se faire une idée nette de la manière dont s'établit l'équilibre entre les quatre corps du système, imaginons par le centre de gravité I de la portion de voûte SS′FE, la verticale LL′, par le point S′ l'horizontale S′E″; par le point E, l'horizontale EL et la verticale E″E′. Représentons par LL′ le poids M de la partie de voûte SS′FE, et soit L′ le point d'application de cette force : si l'on imagine trois autres forces, la première L′E″ dirigée de L′ vers E″, la seconde EL appliquée en E, et dirigée de E vers L, la troisième EE″, dirigée de E vers E″, il est évident que ces quatre forces seront en équilibre, parce qu'elles auront deux à deux, en sens contraire, la diagonale EL′ pour résultante : donc la force L′E″,

prise en sens contraire, est la pression exercée en S'; donc aussi la même force L'E' = LE est la poussée horizontale Es, qui tend à renverser le pied-droit. Par la même raison, EE' = M est la charge ou pression verticale Ex, qui a lieu en E.

Je prends la notation suivante, SS'FE = M, EEaA = N, EE' = h, EL = l, OE' = q, OG' = D, OA = b, OS = a, SS' = k, AD = H, DC = Z, densité de pied-droit = f, rapport du frottement à la presion = π.

On aura Ex = M, EE' = $a + k - h$, E$s = \frac{M.l}{a+k-h}$; égalant le moment de la force Es autour du point C, à la somme des momens des forces Ex, N, fHZ, qui agissent en sens contraire de la poussée, on aura, pour l'équation d'équilibre de rotation, et pour condition du non-glissement des pieds-droits, les formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{M.l}{a+k-h}(h+H)=M(b+Z-q)+N(b+Z-D)+\frac{1}{2}fHZ^2\\ \frac{M.l}{a+k-h}<\pi(M+N+fHZ).\end{array}\right\}\ldots(20).$$

L'emploi de ces formules exigerait qu'on connût la position du joint de rupture EF, laquelle dépend de la figure de la voûte et de plusieurs circonstances physiques. Il paraît, par quelques expériences rapportées par M. Perronnet, que dans les ponts très-surbaissés, le joint de rupture est placé près des naissances.

24. *Formules générales pour les berceaux équilibrés.* J'ai déjà dit qu'abstraction faite du frottement, les berceaux équilibrés admettent une solution rigoureuse du problème de la poussée. Je vais chercher dans cet article les formules qui conviennent à cette espèce de voûte parfaite : dans une autre section, j'aurai égard au frottement, et cette théorie ne laissera plus rien à desirer.

Quand un berceau est équilibré, aucune force ne tend à déranger les voussoirs de leur place; et si l'on opposait de bas en haut, perpendiculairement aux deux joints des naissances, deux forces passant par les centres de gravité des voussoirs, toute la voûte serait soutenue par ces deux forces : ce sont ces deux forces qui

tendent à renverser les pieds-droits; on peut donc considérer toute la voûte comme un seul coin qui repose sur les impostes : cette seule considération suffit pour faire voir que la formule que nous cherchons est comprise dans celles du n° 22, en plaçant le joint de rupture aux naissances. Mais de nouvelles considérations conduisent à des formules plus simples et plus commodes.

Nous avons vu qu'en appelant α l'angle formé par un joint avec la verticale et 2M la masse du coin, la poussée horizontale de ce coin est $\frac{M}{\tang \alpha}$. Nous avons démontré n° 8, que l'aire du berceau est toujours quarrable, et qu'elle est $M = (rk + \frac{1}{2}k^2)\frac{dx}{dy}$ (en appelant k l'épaisseur de la voûte à la clef, et r le rayon de courbure de l'intrados en ce point) : donc, puisque $\tang \alpha = \frac{dx}{dy}$, l'expression de la poussée est $r + \frac{1}{2}k^2$, c'est-à-dire qu'elle est la même pour une portion quelconque de voûte, propriété très-remarquable que fait aussi voir l'équation $\frac{M}{\tang \alpha} = \frac{dM}{d \tang \alpha}$ trouvée dans le n° 2. Il suit de ce principe que la poussée du petit voussoir élémentaire de la clef, est la même que celle de la voûte, ce qui pourrait paraître étonnant.

La poussée tangentielle du coin s'exerce perpendiculairement au joint Aa (fig. 9), et passe par le point $\mathfrak{C}$, centre de gravité du voussoir des naissances.

On a $Aa = K = -R + \sqrt{(2rk + k^2)\frac{ds^2}{dy^2} + R^2}$ [*Voy.* le n° 2, équation (6)]; $A\mathfrak{C} = \frac{3RK + 2K^2}{6R + 3K}$, et $AR' = D' = A\mathfrak{C} \sin \alpha = A\mathfrak{C}\frac{dx}{ds}$. Cette valeur de D′ est rigoureuse; mais on sent que dans la pratique on pourra presque toujours faire, sans erreur sensible, $D' = \frac{1}{2}Aa$. on a aussi $\mathfrak{C}R' = A\mathfrak{C} \cos \alpha = h'$.

En se conduisant comme dans le n° 22, on trouvera facilement les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}&(h' + H)(2rk + k^2) = (2rk + k^2)\tang \alpha\,(Z - D') + fHZ^2;\\ &2rk + k^2 < \pi\,[(2rk + k^2)\tang \alpha + 2fHZ)]\end{aligned}\right\}\ldots(21).$$

Ces formules sont simples et générales; elles s'appliquent à toute

toute espèce de voûte équilibrée. Je ne sache pas que personne les ait encore données.

Observons que si l'épaisseur de la voûte était très-petite, ensorte qu'on pût regarder les poids des voussoirs comme concentrés sur l'intrados, et qu'on cherchât l'équation d'équilibre dans l'hypothèse des arcs-boutans du nº 23, on arriverait aux mêmes formules. Dans ce dernier cas, il faudrait préalablement chercher le centre de gravité de la demi-voûte, et l'on trouverait que sa distance à la montée est $b - a \cot \alpha$.

SECTION III.

Théorie nouvelle et plus rigoureuse de la poussée, en ayant égard au frottement.

25. *Réflexions préliminaires.* Dans la théorie du coin, on suppose que la poussée oblique ou perpendiculaire à la face du coin, s'exerce toute entière pour renverser le pied-droit : ce principe est évidemment faux quand on a égard au frottement ; car on a vu, nº 21, qu'un parallélipipède pouvait, par l'effet du frottement, être retenu en l'air par le moyen de deux verges appuyées contre ses faces verticales ; ce qui serait évidemment impossible sans le frottement. Nous avons vu, dans ce même article, que le frottement diminue la poussée horizontale du coin, et nous avons trouvé l'équation d'équilibre qui en résulte. La théorie de cet article est entièrement applicable au problème de la poussée des voûtes : il suffit de regarder la verge qui soutient le coin, comme représentant le massif du pied-droit augmenté de la portion de voûte qui lui est supposée adhérente. Il ne reste plus qu'à trouver quelle est la portion qui doit former le coin : c'est à cette recherche que je vais me livrer.

Je distingue trois espèces de voûtes en berceau, ou même quatre. La première comprend celles dans lesquelles le voussoir de la clef chasserait ses voisins sans le frottement ; je les appelle voûtes à clef-prépondérante. La seconde espèce comprend les voûtes dont la clef serait expulsée par les voussoirs voisins, sans le frottement ; ce sont les voûtes à clef en défaut. Enfin la troisième espèce est

celle des voûtes équilibrées, dont chaque voussoir, sans l'aide du frottement, est en équilibre avec ses voisins.

Dans la première espèce, la poussée, exercée par la clef, est égale à la pression qu'elle éprouve, et elle se transmet toute entière aux naissances : si on la compose avec le poids du reste de la demi-voûte, la résultante passe au-delà du point $\mathcal{E}$ de la fig. 9, et quelquefois au-delà du point *a* : dans ce dernier cas, la voûte serait renversée, si le frottement ne diminuait la poussée de la clef. Dans la seconde espèce la poussée, exercée par la clef, est plus faible que la pression qu'elle éprouve par le reste de la voûte : c'est cette pression qui réagit aux naissances, et qui opère la poussée de la voûte. Si on compose la poussée de la clef avec le poids du reste de la demi-voûte, la direction de la résultante passe entre le point $\mathcal{E}$ et la verticale du centre de gravité de la demi-voûte : Dans les voûtes équilibrées, la poussée de la clef, égale à sa pression, se transmet toute entière aux naissances : si on la compose avec le poids de la voûte, la résultante passe par le point $\mathcal{E}$.

Imaginons une voûte équilibrée, et retranchons, par la pensée, un certain poids à chaque voussoir, excepté à celui de la clef : la voûte deviendra de la première espèce ; la clef sera prépondérante ou par excès ; la poussée de la clef sera la même qu'auparavant ; seulement la charge verticale de la voûte sur les pieds-droits sera diminuée : or, avant la soustraction des poids, la poussée horizontale de la clef était celle de la voûte elle-même, et elle était égale à celle d'un autre coin quelconque. Depuis la soustraction des poids, cette poussée de la clef, qui est encore celle de la voûte, est devenue un *maximum* : donc on a la poussée des voûtes de la première espèce, en cherchant celle de la clef, qui est un *maximum*.

Actuellement, faisons le changement inverse. Imaginons qu'on ait retranché un certain poids au voussoir de la clef d'une voûte équilibrée, sans rien ôter aux autres : la clef tendra à être expulsée ; on aura une voûte de la seconde espèce ; la poussée contre les pieds-droits ne sera plus l'effet de la clef, mais de tous les autres voussoirs. Plus le coin sera grand, plus sa poussée sera grande ; on aura donc la poussée de la voûte, en la considérant toute entière comme un seul coin : cette poussée sera encore ici un *maximum*.

Ainsi, dans les deux premières espèces, la poussée de la voûte est égale à celle du coin qui exerce la plus grande : dans les voûtes équilibrées, elle est constante; l'expression de cette poussée est en général $\frac{M}{\tang \alpha}$. Dans la première espèce, M est le plus petit voussoir ΔM de la clef; et si on le suppose infiniment petit, ce qui est plus commode et revient sensiblement au même, la poussée de la voûte sera $\frac{dM}{d.\tang \alpha}$.

Dans les voûtes de la seconde espèce, M embrassera la demi-voûte, et la poussée sera $\frac{M}{\tang \alpha}$.

Dans les voûtes équilibrées, M est arbitraire, et la poussée est indifféremment $\frac{M}{\tang \alpha}$, ou $\frac{\Delta M}{\Delta.\tang \alpha}$, ou $\frac{dM}{d.\tang \alpha}$.

Dans ce qui précède, j'ai eu en vue les voûtes les plus ordinaires; cependant il peut arriver que le coin qui exerce la plus grande poussée ne soit ni le voussoir de la clef, ni la voûte entière : dans ce quatrième cas, il faut recourir au principe, que la vraie poussée de la voûte est la même que celle du coin qui exerce la plus grande, et chercher préalablement le point de l'intrados qui détermine ce coin, en employant l'équation $d\left(\frac{M}{\tang \alpha}\right) = 0$.

Ce qui précède servirait à résoudre ce problème : Étant donné une voûte qui repose sur un plan horizontal sans frottement, trouver sa poussée, c'est-à-dire la force horizontale qu'il faudrait employer de dehors en dedans contre les voussoirs des naissances, pour empêcher que la voûte ne se désempare. Il faut voir à présent si l'addition du pied-droit peut changer la théorie précédente.

Concevons toujours la voûte composée de deux parties, l'une 2M formant coin, l'autre N réunie de chaque côté au pied-droit : je dis que la poussée horizontale du coin se transmet toute entière au centre C de rotation du pied-droit, comme elle se transmettait au point a de l'extrados, quand il n'y avait pas de pied-droit. En effet, si l'on imagine au point C deux forces, l'une verticale de bas en haut et égale au poids de la demi-voûte réuni à celui du pied-droit, l'autre horizontale, de dehors en dedans, et égale à la poussée du coin; il est clair que le système des forces sera en équilibre. La

force verticale est constante, mais la force horizontale est variable et dépend du coin; c'est cette force variable qui tend à renverser le pied-droit dans presque tous les cas; je ne dis pas toujours, parce qu'en effet il peut arriver que le pied-droit soit renversé par une force plus petite : ceci mérite d'être éclairci.

La plus grande poussée que je représente par F, est bien la force qui tend à faire glisser le pied-droit; mais s'il existe une autre force ou poussée horizontale F′ qui, sans être aussi grande que F, ait néanmoins un plus grand moment relativement à ceux des trois forces verticales qui tendent à faire tourner en sens contraire, ce sera F′ qui, agissant avec plus d'avantage, renversera le pied-droit. Ces deux effets, le glissement et le mouvement de rotation autour du point C, sont entièrement indépendans; le premier est produit par la force F, le second par F′. Si l'on calculait Z de manière à mettre le pied-droit en équilibre avec le coin qui a produit F, il n'en serait pas moins renversé par la force F′ provenant d'un coin de moindre poussée, mais qui agit plus favorablement. Quant à ce second coin qui produit F′ et qu'il n'est pas moins essentiel de connaître, on l'obtiendra en cherchant le *maximum* de Z dans l'équation d'équilibre de rotation, en y faisant varier α : cela est encore fondé sur ce principe, que la pesanteur qui tend toujours à produire le plus grand effet possible, doit, pour le renversement, employer le coin le plus favorable.

Ainsi, le coin de plus grande poussée opère le mouvement horizontal ou le glissement, et cependant il existe ou peut exister un autre coin qui rende Z *maximum* et opère le renversement. Voilà deux principes qui donnent deux valeurs différentes pour Z, si on les emploie isolément à la détermination de α. On sent néanmoins que le problème ne peut avoir qu'une solution : on concilie les deux principes de la manière suivante.

C'est bien toujours la plus grande poussée F qui opère le glissement : je dis de plus à présent qu'elle opère aussi le renversement, et voici comment il faut concevoir la chose. La force F, qui n'opérerait pas le renversement si elle agissait sur le joint du coin dont elle émane, se transmet à un autre joint qui doit être celui par lequel elle peut renverser le plus large pied-droit. Ce troisième joint dont j'appelle α', *l'angle*, doit donc rendre Z un *maximum*,

mais en regardant F comme constant. Il faut imaginer quatre joints de rupture symétriquement placés, savoir, deux dans chaque moitié de la voûte : le coin compris ordinairement entre les deux joints les plus élevés, produit la plus grande poussée ou Z ; cette force n'agit pas dans ces deux joints, elle se transmet aux deux qui sont inférieurs, contre lesquels elle opère, avec le plus grand avantage possible, le renversement des pieds-droits.

J'ai dit que la plus grande poussée se transmet toute entière au point C ; ensorte que si l'on appliquait en ce point deux forces, l'une verticale et égale au poids de la demi-voûte augmenté du pied-droit, l'autre horizontale, dirigée suivant CD, et égale à la plus grande poussée, le système serait en équilibre : mais si l'on appliquait à la clef une force horizontale et égale à la plus grande poussée, l'équilibre subsisterait encore. Il suit de là que non-seulement la plus grande poussée se transmet au point C, mais encore qu'elle réagit sur la clef et y opère une pression égale. Les mêmes raisonnemens prouvent que la plus grande poussée est une force constante qui de proche en proche se transmet à tous les voussoirs sans rien perdre de son intensité. En quelque point M qu'on la suppose appliquée, il faut toujours que son moment à l'égard du point C, soit égal au moment de la partie supérieure M, qui repose en ce point plus à celui de la partie inférieure N augmentée du pied-droit. La question est réduite à savoir quel est ce point qui facilite le plus le renversement ou qui exige le *maximum* de Z.

Tels sont les principes de la théorie que j'ai développée dans les articles suivans, et qui bannit l'arbitraire dans la position du joint de rupture. La règle de pratique suivie jusqu'ici n'était fondée sur aucun principe ; elle ne pouvait pas même être déterminée par l'expérience, à cause du nombre et de la variation des élémens qui déterminent la position des joints de rupture.

Dans ce qui précède, je n'ai point considéré le frottement : il faudra examiner les modifications qui en résultent ; c'est ce que je vais faire dans les articles suivans, en distinguant toujours les quatre espèces de voûtes.

Enfin, après avoir trouvé les formules dans la double hypothèse du coin avec ou sans frottement, il faudra chercher dans l'hypothèse

des arcs-boutans, quel est le joint qui produit le plus grand effet et la plus grande poussée horizontale en C. La valeur de Z qui en résultera sera encore un *maximum*. Si elle surpasse le *maximum* donné par l'hypothèse du coin, il faudra la préférer; car la pesanteur produira trois joints de rupture, savoir, un à la clef et les deux autres symétriquement placés, plutôt que deux seulement; si ce mode de rupture doit lui faire produire un plus grand effet.

En étendant ce principe, on serait conduit à supposer cinq joints de rupture plutôt que trois; mais on sent que les difficultés du calcul surpasseraient bientôt les forces de l'analyse; d'ailleurs je ferai voir qu'il n'y a réellement que deux hypothèses.

26. *Formules générales dans l'hypothèse du coin avec frottement.* Je vais appliquer les principes du numéro précédent à la recherche des formules générales, lorsqu'on a égard au frottement.

En comparant la fig. 13 avec la fig. 20, on voit que le cas d'équilibre traité dans le n° 21, est précisément celui d'une voûte dont la partie EFF'E' agit comme un coin pour renverser le reste de la voûte, supposé adhérent au pied-droit. Je rappelle ici la notation que je conserverai toujours, à moins que je n'avertisse du contraire.

Je fais (fig. 20), $AO = b$, $OS = a$, $SS' = k$, $OR' = q$, $RR' = h$, $OG' = D$, $AD = H$, $DC = Z$, $SS'FE = M$, $EFaA = N$, $M + N = S$, $SP = x$, $PE = y$, $SE = s$, $\alpha =$ angle du joint quelconque EF avec la verticale; $R =$ rayon de courbure du point E; $r =$ rayon de courbure de l'intrados au point S; $m' = 3{,}1416 = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$;

$\pi = \frac{\text{frottement}}{\text{pression}}$; $\theta =$ angle du frottement, ou tang $\theta = \pi$; $F =$ poussée horizontale produite en R par le coin; et (fig. 25) $O\alpha = a + \frac{1}{2}k = a'$; $O6 = b'$; $AR' = D'$; $6R' = h'$; $Aa = K$; $f =$ densité du pied-droit.

Cela posé, en comparant les quantités analogues et correspondantes du n° 21 avec les données précédentes, on reconnaîtra qu'il faut substituer dans l'équation (17) du n° 21, $(H + h)$ pour H_1; la quantité $(b + Z - q)$ pour Z_1, et pour NG moment du massif, la

somme $N(b+Z-D)+\frac{1}{2}fHZ^2$ des momens du pied-droit et de la portion de voûte adhérente.

Par ces substitutions dans les équations (17), on a pour les formules de l'équilibre de rotation et du non-glissement des pieds-droits,

$$\left.\begin{array}{l}(H+h)F+Mq+ND=bS+SZ+\frac{1}{2}fHZ^2\ldots\\ F<\pi(S+fHZ)\ldots\ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots(22).$$

En supprimant le terme fHZ, on a la condition du non-glissement de la voûte sur le pied-droit.

Remarquons d'abord que les équations (22) reviennent au même, quand $\pi=0$, que les équations (18) et (19) du n° 22, ainsi que cela devait être.

Pour passer à la discussion des équations (22), il faut préalablement rappeler quelques principes. Le frottement absorbe une partie de la poussée horizontale qu'un coin quelconque produirait sans cette résistance : il opère un effet de plus; il change la grandeur du coin de plus grande poussée et celle du coin du plus grand renversement; mais cela n'empêche pas que les choses ne se passent comme nous l'avons exposé dans l'article précédent.

Observons d'abord que l'équation (22) est censée ne renfermer d'autres variables que α et Z, puisque M, N, q, D, h sont des fonctions de α données par l'équation de l'intrados.

La première chose à faire, c'est de chercher l'angle α du joint de plus grande poussée : il faut pour cela employer l'équation

$$dF=0 \quad \text{ou} \quad (\text{n}^\circ\ 21),\quad d.M\cot(\alpha+\theta)=0\ldots\ldots(23).$$

La seconde opération consiste à chercher le *maximum* de Z. Si on substituait la valeur de α dans l'équation (22), la valeur de Z qu'on en tirerait, ne serait pas un *maximum* ou pourrait n'en être pas un, quoiqu'elle correspondît au *maximum* de la poussée : ce ne serait qu'une première valeur approchée de Z.

Si on égalait à zéro la différentielle de la valeur de Z donnée par l'équation (22), on aurait, après avoir éliminé α, une autre valeur de Z qui serait un *maximum*, mais qui ne correspondrait pas au *maximum* de la poussée; on aurait une seconde valeur plus approchée pour Z.

Enfin, on aura le vrai *maximum* cherché de Z, en observant qu'il s'agit de trouver le point d'application dans lequel la force constante F s'exerce avec le plus d'avantage contre le pied-droit. Or, Z sera un *maximum* si le premier membre de l'équation (22) en est un; car si on fait $dz = 0$ dans le second membre, il s'anéantit. De plus il suffit, pour que ce premier membre soit un *maximum*, qu'on ait l'équation

$$Fdh + d(Mq) + d(ND) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (24),$$

puisque F est constant. Substituant dans l'équation (22) la valeur de α donnée par l'équation (24), on aura le *maximum* cherché de Z, c'est-à-dire la vraie solution, la plus rigoureuse qu'on puisse desirer, puisqu'elle remplit la double condition de procurer le *maximum* de F et celui de Z.

La solution rigoureuse comprend, comme on voit, deux parties, savoir : 1° trouver F par l'équation (23); 2° trouver Z par les équations (24) et (22).

Pression. Il est essentiel dans la science de la construction, de savoir quelle pression éprouve chaque voussoir, afin d'en conclure s'il pourra supporter, sans en être écrasé, la pression trouvée par le calcul.

Nous avons vu (n° 21) que lorsqu'un coin repose entre deux plans inclinés fixes, la pression qui a lieu dans le contact est $\frac{M}{\sin\alpha + \pi \cos\alpha}$: cela n'a plus lieu dans la voûte, parce que la pression n'est pas toujours l'effet du coin supérieur, mais quelquefois celui de la partie inférieure de la voûte. Si l'on appliquait deux forces au joint des naissances, l'une verticale et égale au poids de la demi-voûte, l'autre horizontale et égale à la plus grande poussée F; si en même temps on appliquait à la clef une force horizontale = F; il est évident que la demi-voûte serait en équilibre avec ces trois forces. On voit, comme je l'ai déjà dit, que la poussée réagit contre tous les voussoirs, et qu'il en est de même de la force verticale et égale à S dont je viens de parler. Il suit de là que chaque joint est sollicité à la fois par deux forces, l'une F horizontale, l'autre M verticale = poids des voussoirs supérieurs, ainsi que par deux autres égales et directement opposées, d'où résulte l'équilibre et la pression.

pression. Il faut calculer l'effet des forces F et M perpendiculairement au joint : la somme des deux pressions partielles sera la pression totale et cherchée P.

La pression partielle produite par F sera F $\cos\alpha$; celle provenant de M sera M $\sin\alpha$: on aura donc la somme

$$F\cos\alpha + M\sin\alpha = P \ldots\ldots (25).$$

Cette formule, en y mettant pour F et M leurs valeurs, fera connaître la pression P qu'éprouve un joint quelconque : elle fait voir que cette pression est F pour la clef et S pour le voussoir des naissances, si la ligne des naissances est horizontale.

La pression P est, comme on voit, variable pour chaque joint; cela donne lieu à un problème curieux et utile, celui de savoir quel est le joint pour lequel P est un *maximum*, et quelle est alors la valeur de P.

On trouvera l'angle α du joint en question, en égalant à zéro la différentielle de la valeur de P, prise en regardant F comme constant, et en y mettant pour M sa valeur donnée en fonction de α, par la figure de la voûte, et l'on aura

$$M\cot\alpha - F + \frac{dM}{d\alpha} = 0 \ldots\ldots (25').$$

Ayant trouvé α par l'équation (25'), et ayant substitué sa valeur dans l'équation (25), on aura le *maximum* de pression P.

27. *Formules dans l'hypothèse des arcs-boutans.* J'ai dit qu'après avoir cherché Z dans l'hypothèse du coin avec frottement, il fallait la chercher dans celle des arcs-boutans : deux principes qui ont servi de base à la première recherche, s'appliquent encore à la seconde. 1°. Il faut trouver l'arc qui s'appuyant d'une part à la clef sur l'extrados, et d'autre part par son extrémité inférieure sur l'intrados, exerce la plus grande poussée. 2°. Cette poussée se transmettant et réagissant dans tous les voussoirs, il faut trouver le point d'application où elle produira le plus grand effet, c'est-à-dire le *maximum* de Z. Ainsi on doit avoir, comme dans l'hypothèse du coin avec frottement, $dZ = 0$ et $dF = 0$.

Il est évident, en reprenant l'équation (20) du n° 25, qu'on a

$$F = \frac{Ml}{a+k-h} \ldots\ldots\ldots (26).$$

On remplira donc la condition $dF = o$ par l'équation suivante :

$$d\left(\frac{Ml}{a+k-h}\right) = o \ldots\ldots\ldots (27).$$

Quant à la seconde condition $dZ = o$, on observera, comme dans le numéro précédent, qu'en cherchant le *maximum* de Z, il faut faire F constant. On verra ensuite que l'équation (20) est la même que l'équation (22), avec cette différence seulement que la lettre F, qui dans les deux hypothèses représente le *maximum* de la poussée, n'a pas la même valeur dans toutes deux, quoiqu'elle soit constante dans les deux cas.

La marche à suivre dans l'hypothèse actuelle est donc la même que dans la précédente, ainsi que la formule des équations. Seulement il faut observer que le plus souvent la valeur de F sera ici un peu plus difficile à trouver, et que de plus le frottement n'entre pour rien dans le calcul.

Formules d'approximation.

28. Dans les deux numéros précédens, j'ai donné les moyens d'approcher de la vraie valeur de Z, autant que la nature du problème paraît le comporter. Les calculs à faire peuvent paraître longs et même surpasser la portée de la plupart des Architectes. Je vais essayer, dans cet article, de donner des formules d'une application plus facile et suffisantes pour les besoins de la pratique, sauf à recourir aux articles précédens, quand on aspirera à plus de précision.

Je reprends l'équation (22) que je mets sous la forme suivante, qu'on verra revenir au même, en retournant à la notation convenue.

$$(H + k')F + (h - k')F - M(b - q + D') - N(b - D + D')$$
$$= S(Z - D' + \tfrac{1}{2} fHZ^2 \ldots\ldots\ldots (a).$$

Maintenant je remarque que le terme $(h - k')F$ exprime le moment de la poussée F pour faire tourner (fig. 20) et (fig. 25),

la partie de voûte EFaA, autour du point C, du joint des naissances ; que le terme $-M(b-q+D')$ est le moment de l'aire SSFE, et le terme $-N(b-D+D')$ celui de l'aire EFaA pour faire tourner autour du même point en sens contraire. Si les deux derniers momens ne l'emportaient pas sur le premier, l'équilibre serait détruit, et la voûte renversée ; donc les deux momens qui ont le signe moins, surpassent le premier qui est positif : or la variation de Z ne dépend que de celle des trois termes ci-dessus ; donc Z sera un *maximum* quand la somme de ces trois termes sera un *minimum*, c'est-à-dire zéro.

Au reste cette conclusion n'est vraie qu'en négligeant l'effet du ciment qui peut rendre une partie de la voûte adhérente à un certain point aux pieds-droits : c'est pour cela que la conclusion que j'ai tirée n'est qu'une approximation.

Je fais donc égale à zéro la somme des trois momens ci-dessus ; ce qui réduit l'équation (a) à la suivante :

$$(H+k')F = S(Z-D') + \tfrac{1}{2}fHZ^2 \ldots\ldots (b).$$

Nous serions arrivés à cette dernière équation par le raisonnement suivant : Si l'on appliquait au point C deux forces, l'une verticale $=S$, l'autre horizontale $=F$, la voûte serait en équilibre : donc la voûte reproduit en sens contraire contre le pied-droit auquel elle tient par le frottement, les deux forces ci-dessus. Si on égale le moment de F autour du point C, à celui de S augmenté de celui du pied-droit, on retrouve l'équation (b).

On aperçoit que le second principe qui nous a fait trouver l'équation (b), n'est autre chose que l'hypothèse des deux arcs-boutans embrassant chacun la demi-voûte. Ainsi les deux hypothèses rentrent l'une dans l'autre, quand on fait la somme des trois momens ci-dessus égale à zéro.

Cette même supposition donne la valeur de F : en effet, elle exprime l'état d'équilibre de la voûte : cet équilibre doit donc avoir lieu quand la poussée est appliquée à la clef. Or, à la clef on a $M=0$, $N=S$; égalant à zéro les trois momens pour ce point, on a

$$F = \frac{b-D+D'}{a+\frac{1}{2}k-h'} \ldots\ldots\ldots\ldots (c),$$

en observant qu'alors $h = a + \frac{1}{2}k$.

Il ne reste plus qu'à substituer cette valeur de F dans l'équation (*b*); mais il y a quelques observations à faire : cette valeur de F n'est pas sa vraie valeur, mais seulement la limite qu'elle ne peut excéder; car cette vraie valeur peut être moindre sans qu'il y ait renversement. C'est ce qui arrive quand la somme des trois momens dont nous avons parlé est négative. Par exemple, si l'extrados est une ligne droite horizontale, on a $a + \frac{1}{2}k - h = 0$, d'où F infinie. Il suit de là que la limite trouvée pour F s'écarte trop de la vérité, quand la voûte est très-aplatie. Nous allons chercher une autre limite qui, combinée avec la première, donnera toujours un résultat suffisamment exact.

J'ai déjà dit que sans le frottement et l'adhérence, toutes les voûtes non-équilibrées s'écrouleraient : voyons leurs effets sur la poussée.

On a $F = M \cot(\alpha + \theta)$; quand $\theta = 0$, on a $F = M \cot \alpha$, et à la clef, dans les voûtes de première espèce, $F = dM . d \cot \alpha = \frac{0}{0}$, quantité finie. La valeur de F est souvent si grande alors, qu'elle renverserait la voûte sur le pied-droit, comme nous le verrons dans le berceau circulaire. Le frottement seul s'y oppose; car quand θ n'est pas zéro, on a à la clef $F = 0$. Le *maximum* de F n'a plus lieu en ce point; il s'en éloigne suivant la nature de la voûte et la grandeur du frottement : on explique par là pourquoi les voûtes non équilibrées ne sont pas toutes renversées.

Dans les voûtes de la seconde espèce, le *maximum* de F aurait lieu aux naissances sans le frottement, et la partie supérieure de la voûte serait expulsée par la réaction des voussoirs inférieurs. Le frottement fait remonter le joint de plus grande poussée, et en diminuant la valeur de F, il empêche l'expulsion de bas en haut des voussoirs supérieurs.

Comme l'expression de la poussée est différente dans les quatre espèces de voûte, il est utile de savoir distinguer à laquelle des quatre espèces un berceau proposé appartient.

Il faut concevoir qu'on ait construit sur la même épaisseur k de la clef, un extrados qui rendît la voûte équilibrée : s'il embrasse l'extrados proposé, le berceau est de la première espèce; s'il en est embrassé, le berceau est de la seconde espèce; si les deux extrados

se confondent, le berceau est évidemment équilibré : enfin, s'ils se coupent, le berceau est de la quatrième espèce. On a un exemple de cette quatrième espèce, lorsque l'intrados est circulaire et que l'extrados étant parabolique, s'éloigne depuis la clef.

Dans la première espèce, quand on néglige le frottement, la valeur de F est facile à trouver. En effet, on a $\theta = 0$; $F = M \cot \alpha$; $dF = d(M \cot \alpha = \frac{0}{0} = \frac{dM}{d.\mathrm{tang}\,\alpha}$. Mais on a $dM = \frac{kds}{2r}(2r + k)$; $d.\mathrm{tang}\,\alpha = d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ et r, dont l'expression générale est $\frac{ds^2}{dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$, devient, quand $ds = dy$, $r = \frac{ds}{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$; ce qui donne

$$\frac{dM}{d\,\mathrm{tang}\,\alpha} = kr + \tfrac{1}{2}k^2 = F \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

C'est une autre limite de F dans la première espèce de voûte, puisque le frottement a été négligé. La limite analogue pour la seconde espèce est $F = S \cot \alpha$, en entendant ici par α l'angle du joint des naissances.

En résumant tout ce qui a été dit dans cet article, on trouve les formules suivantes.

Formules pour la première espèce de berceaux.

$$\left.\begin{array}{l} S(H + h')\frac{b - D + D'}{a + \frac{1}{2}k - h'} = S(Z - D') + \frac{1}{2}fHZ^2 \ldots \\ k(r + \frac{1}{2}k)(H + h') = SZ + \frac{1}{2}fHZ^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S\frac{b - D + D'}{a + \frac{1}{2}k - h'}, \text{ ou } (kr + \frac{1}{2}k^2) < \pi(S + fHZ) \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (28).$$

On emploiera la première des trois équations plutôt que la seconde, si $\frac{b - D + D'}{a + \frac{1}{2}k - h'} S < kr + \frac{1}{2}k^2$; *et vice-versâ* : cela est fondé sur ce que la plus petite des deux limites de F est la plus proche de la vraie valeur.

La troisième équation exprime la condition du non-glissement des pieds-droits sur leur plate-forme : on choisira aussi la première

expression du premier membre de l'inégalité, quand on fera usage de la première équation pour déterminer Z.

Enfin, si la voûte est très-aplatie, on fera $h' = o$, $D' = o$ dans la première, si elle doit être employée, parce que le mouvement de rotation se fait autour du point A.

Formules pour les berceaux de la seconde espèce.

$$\left.\begin{array}{l} S(H+h')\dfrac{b-D+D'}{a+\frac{1}{2}k-h'} = S(Z-D')+\frac{1}{2}fHZ^2\ldots \\ S\cot\alpha\,(H+h') = S(Z-D')+\frac{1}{2}fHZ^2\ldots\ldots\ldots \\ S\dfrac{b-D+D'}{a+\frac{1}{2}k-h'},\ \text{ou}\ S\cot\alpha < \pi(S+fHZ)\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots\ldots(29).$$

Il faut faire la même distinction que ci-dessus pour le choix entre la première et la seconde.

Observations. Tout ce que j'ai dit dans l'article précédent s'applique également aux voûtes équilibrées. Cependant lorsque l'épaisseur est très-petite, ou que les poids des voussoirs sont supposés concentrés sur l'intrados, il n'y a plus lieu de chercher le point d'application de la poussée F pour rendre Z un *maximum*, parce que la somme des trois momens dont j'ai parlé pour faire tourner la demi-voûte autour du point $\mathfrak{C}$, est une quantité constante qui devient zéro quand on y fait $F = c$ (*voyez* n° 24). Ainsi, pour les voûtes équilibrées, on peut prendre pour formules d'approximation, celles du n° 24.

Quant aux voûtes de la quatrième espèce, on pourra employer celles rapportées ci-dessus pour la première et la seconde espèce.

Il est encore une observation générale à faire. Il n'existe de *maximum* pour Z, c'est-à-dire un point d'application plus favorable à la poussée, que dans l'hypothèse où l'on suppose une partie de la voûte adhérente au pied-droit ; mais quand on considère la demi-voûte comme ne formant qu'une seule pièce, le point d'application est indifféremment à la clef ou aux naissances. Il vaut mieux choisir ce dernier point, ainsi que je l'ai fait, parce que l'équation d'équilibre est plus simple qu'elle ne le serait en choisissant la clef.

Récapitulation. La première chose à faire, c'est de connaître la valeur de θ ou la grandeur du frottement. Dans les pierres de taille, le rapport π du frottement à la pression, est environ $\frac{1}{2}$; mais comme dans la construction il peut se glisser du sable entre les voussoirs, ce qui diminue le frottement, il sera plus convenable, et en même temps plus prudent de faire $\pi = \frac{1}{3}$, valeur qui convient aux corps passablement polis : cela donne $\theta = 18°26'$ nonagésimaux.

Substituant cette valeur de θ dans l'équation (23), ainsi que celle de M donnée en fonction de α par l'équation d'intrados, on aura la valeur de α qui détermine le joint de plus grande poussée. Remettant cette valeur de α dans l'équation (23), on aura celle de F. Enfin mettant dans l'équation (24) la valeur de F et celle de S donnée par la figure de la voûte, on aura Z.

Il faut observer que la valeur de F est aussi celle de la pression qui a lieu à la clef, chose essentielle à connaître, puisque c'est par elle qu'on saura si la pierre dont la résistance est censée connue par l'expérience, peut soutenir, sans s'écraser, la pression qu'elle éprouve à la clef. Quant à celle qui a lieu aux naissances et à la base du pied-droit, elle n'est autre chose, dans le premier point, que le poids de la demi-voûte; et dans le second, celui de la demi-voûte augmenté du pied-droit. C'est faute d'avoir calculé cette pression que les colonnes du Panthéon-Français se sont écrasées dans leur circonférence, ce qui les a fait affaisser. Enfin il faudra chercher par la formule (25'), la position du joint qui éprouve le *maximum* de pression et la valeur de ce *maximum*, afin de connaître la plus grande pression qu'aura à supporter le voussoir le plus pressé.

Après avoir trouvé le *maximum* de Z dans l'hypothèse du coin avec frottement, on pourra le chercher dans celle des arcs-boutans du n° 23. Pour cela, on emploiera le procédé du n° 27. On choisira alors le plus grand des deux *maxima* de Z fournis par les deux hypothèses.

Si la voûte est très-surbaissée, l'hypothèse des arcs-boutans pourra donner le plus grand des deux *maxima*. M. Perronnet a observé que dans les grandes arches très-surbaissées, il se faisait

trois ruptures, la première à l'intrados de la clef, les deux autres près des naissances à l'extrados.

Il est en effet difficile de concevoir que les pieds-droits puissent éprouver le plus petit mouvement de rotation, sans que la voûte s'ouvre à la clef. Dans l'hypothèse du coin sans frottement, on est obligé de supposer dans le contact des deux joints de rupture un petit globule mouvant par lequel se transmet la poussée. Hors ce cas, on ne peut se dispenser d'admettre le frottement, ou bien il faut renoncer à l'hypothèse du coin.

Dans la section suivante, les applications que je ferai achèveront d'éclaircir la théorie. Je terminerai celle-ci par une remarque importante; c'est qu'il n'y a réellement que deux hypothèses, celle du coin et celle des arcs-boutans. En effet, si on suppose un nombre pair de joints de rupture, il n'y en aura point à la clef; deux joints symétriquement placés, formeront toujours un coin; un de ces coins sera celui de plus grande poussée; cette plus grande poussée sera celle qui se transmettra au centre de rotation du pied-droit et qui réagira à la clef; il faudra ensuite chercher son point d'application le plus favorable pour avoir Z : c'est précisément en quoi consiste ma théorie.

Si on suppose un nombre impair de joints de rupture, il s'en trouvera un à la clef. Chaque moitié de voûte sera partagée en arcs-boutans. La poussée qui aura lieu dans un point de rupture pourra être regardée comme provenant de la réunion des arcs supérieurs dont le plus élevé butte à la clef. Il existera un *maximum* de poussée qui sera encore celui qui opère le renversement. Il faudra ensuite chercher son point d'application, puisque cette poussée se transmet et réagit dans tous les points : on aura ainsi le *maximum* de Z. Il est donc vrai qu'il n'existe, comme je l'ai dit, que deux hypothèses différentes. Il ne doit pas paraître moins évident que le renversement se fera par celle des deux qui offrira le plus de facilité à la force de la pesanteur.

Au reste tout ce que je viens d'exposer dans cet article suppose qu'on peut trouver la vraie valeur de Z; mais il faudrait pour cela que le ciment fût susceptible d'appréciation, et que l'action du frottement fût bien connue; comme rien de tout cela n'a lieu, il s'ensuit qu'il faut renoncer à trouver la vraie valeur de Z, et se contenter

contenter de la limite fournie par l'équation (28) ou (29), et par celles des nos 26 et 27.

Dans le n° 28, la demi-voûte est censée agir d'une seule pièce ; dans les articles 26 et 27, on a supposé que la poussée provenait du coin ou de l'arc capable d'exercer la plus grande, et de plus, que la voûte s'ouvrait dans le joint qui favorise le plus le renversement, tandis que la partie inférieure restait adhérente au pied-droit : ce ne sont là que des hypothèses que beaucoup de causes accidentelles peuvent détruire ; elles ont toujours l'avantage de bannir l'arbitraire dans la position du joint de rupture et de fournir des limites de Z suffisantes pour la pratique.

SECTION IV.

Applications à différentes espèces de voûtes.

29. *Berceau cylindrique.* Comme dans les hypothèses des arcs-boutans et de la Hyre, on a besoin de connaître le centre de gravité d'une partie de la voûte dont je suppose ici l'épaisseur constante, je commence par ce problème préliminaire.

Il s'agit de trouver la position du centre de gravité d'un espace ou portion de couronne circulaire EFaA (fig. 23) formé par deux arcs de cercle concentriques et par deux portions de rayon.

J'imagine cet espace décomposé en trapèzes infiniment petits, tels que AA'd'a. Les centres d'inertie de tous ces petits trapèzes seront placés sur un arc de cercle KL qui sera également chargé partout du poids de ces trapèzes. La question sera réduite à trouver le centre d'inertie G de cet arc KL, lequel doit être placé sur le rayon OR qui divise en deux également l'angle O.

Soit AO $= b$, A$a = k$, angle AOE $= \beta$: on trouve aisément que $a\text{K} = \frac{1}{3} k \frac{3b + k}{2b + k}$. On sait ensuite que $\text{OG} = \frac{\text{OR} \,.\, \text{KL}}{\text{arc KRL}}$; mais β étant exprimée en parties du rayon 1, on a arc KRL $= \beta . \text{OR}$; de plus, KL $= 2 \sin \frac{1}{2} \beta . \text{OR}$ et $\text{O}g' = \text{OG} . \cos \frac{1}{2} \beta$. On déduit aisément de ces valeurs, $\text{O}g' = \frac{2}{3} \sin \beta \frac{3b^2 + 3bk + k^2}{\beta (2b + k)} = \text{D}$.

Quand la couronne est d'un quadrant, comme dans la (fig. 22), on a $\sin \mathcal{C} = 1$; $\mathcal{C} = 1,5708$ et $D = \frac{2}{3} \frac{3b^2 + 3bk + k^2}{\frac{1}{2} m (2b + k)}$.

Cette valeur de D servira à faire usage de l'hypothèse du coin de la Hyre et de celle des arcs-boutans.

On déduit aisément de la valeur de D, en observant que $\mathcal{C} = 90° - \alpha$, l'expression de $l = \mathrm{EL}$ (fig. 21), employée dans l'hypothèse des arcs-boutans du n° 23, et l'on trouve

$$l = b \sin \alpha - \frac{2}{3} (1 - \cos \alpha) \frac{3b^2 + 3bk + k^2}{\alpha (2b + k)}.$$

En substituant la valeur de D dans l'équation (18) du n° 22, ainsi que $(b + \frac{1}{2} k) \cos \alpha$ pour h, et 1 pour f, on a la formule suivante qui dispense de chercher le centre de gravité dans l'hypothèse du coin sans frottement. J'ai fait pour abréger,

$$b + \tfrac{1}{2} k = b'; \; 3,1416 = m;$$

$$Z = -\frac{2mkb'}{4H} +$$

$$\sqrt{2kb'\alpha . \cot \alpha + \frac{2k^2b'^2\alpha}{H \sin \alpha} - \frac{mbkb'}{H} + \frac{2k \cos \alpha}{3H} (3b^2 + 3bk + k^2) + \frac{m^2k^2b'^2}{4H^2}} \ldots \ldots \ldots \; (a).$$

Il faut calculer α en partie du rayon 1, et non en degrés. Si l'on fait $\alpha = 45° = 0,7854 = \frac{1}{4} m$, on a $\sin \alpha = 0.707$; c'est l'hypothèse de la Hyre.

Si l'on applique au berceau cylindrique les réflexions des n°s 25 et 26, on reconnaît qu'il est de la première espèce : d'ailleurs l'expression $\frac{M}{\operatorname{tang} \alpha}$ qui est ici $\frac{\alpha k (b + \frac{1}{2} k)}{\operatorname{tang} \alpha}$, fait voir évidemment qu'elle devient un *maximum* à la clef où $\alpha = \operatorname{tang} \alpha$, résultat conforme.

Si l'on veut avoir la valeur de Z dans l'hypothèse du coin sans frottement, auquel cas le *maximum* de poussée a lieu à la clef, on aura $M = 0$; $N = S = \frac{1}{2} mk (b + \frac{1}{2} k)$; $F = k (b + \frac{1}{2} k)$; $h = (b + \frac{1}{2} k)$; $q = 0$, et pour D la valeur trouvée ci-dessus pour le cas du quart de cercle. Substituant dans l'équation (22) ou (28), et faisant, pour

abréger, $b + \frac{1}{2}k = b'$, on a la suivante

$$Z = -\frac{mb'k}{2fH} + \sqrt{\frac{m^2b'^2k^2}{4f^2H^2} + \frac{k}{fH}(0,8584\,b'^2 + \tfrac{1}{2}mb'k + 2b'H + \tfrac{1}{6}k^2)} \ldots\ldots (b).$$

On retrouve cette même équation en faisant dans l'équation (a), $\alpha = 0$, comme cela doit être à la clef. Au reste cette équation (b) ne donne que la plus grande limite de la valeur de Z, puisqu'elle suppose le frottement nul, ce qui est faux.

On prouverait que quand le frottement est nul, c'est à la clef qu'on a à la fois le *maximum* de poussée, le *maximum* de Z en faisant varier la poussée, ou en la regardant comme constante; mais cette considération n'est que de pure curiosité.

Si d'après la valeur de $F = k(b + \frac{1}{2}k)$, on cherche par l'équation (17) la condition d'équilibre entre la clef et la demi-voûte, on trouve $k = 0,8218b$. Ce résultat fait voir que sans le frottement, il faudrait que l'épaisseur k fût presque égale au rayon b, pour que la clef ne renversât pas la demi-voûte sur le pied-droit, en la supposant même d'une seule pièce. Mais le frottement rend la poussée nulle à la clef, et s'il y existe une pression, elle n'est que l'effet de la réaction des autres voussoirs.

Si on veut employer l'hypothèse de deux arcs-boutans embrassant chacun la demi-voûte, on a les formules suivantes pour l'équilibre de rotation et la condition du non-glissement des pieds-droits,

$$\left.\begin{array}{l} 0,2854k(b + \frac{1}{2}k)\,H = 0,7854k(b + \frac{1}{2}k)\,Z + fHZ^2 \ldots\ldots \\ 0,2854\,(b + \frac{1}{2}k) < \pi(0,7854k(b + \frac{1}{2}k) + 2fHZ) \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (c).$$

Je n'ai rapporté ce qui précède que pour donner un exemple de la manière de se conduire pour discuter une voûte dans les différentes hypothèses. Je passe maintenant à l'application de mes formules (23) et (28) des n°s 26 et 28, qui me paraissent préférables à tous égards.

L'équation (23) qui est $F = M\cot(\theta + \alpha)$ devient ici $F = k(b + \frac{1}{2}k)\,\alpha\cot(\theta + \alpha)$; on a $\theta = 18°\,26'$: on peut chercher le *maximum* de F, soit par le tâtonnement, soit par l'équation $\alpha = \sin(\theta + \alpha)\cos(\theta + \alpha)$, à laquelle on arrive en égalant à

zéro la différentielle de F : on trouve $\alpha = 29°$ environ ; c'est l'angle qui donne le coin de la plus grande poussée. La valeur de F devient $F = 0,4649k(b + \frac{1}{2}k)$. Faisant donc $S = 1,5708k(b + \frac{1}{2}k) = 1,5708b'k$; $F = 0,465b'k$; $h' = 0$, dans la première des équations (28), on aura les formules suivantes pour l'équilibre de rotation et le non-glissement des pieds-droits,

$$\left.\begin{array}{l} Z = -\frac{1,5708b'k}{fH} + \sqrt{\frac{(1,5708)b'^2k^2}{f^2H^2} + \frac{0,93b'k}{f} + \frac{6,2832b'kD'}{fH}} \cdots \\ 0,465b'k < \pi\,(1,5708b'k + fHZ) \cdots\cdots \end{array}\right\} \ldots (d).$$

On voit par la dernière qu'en faisant $\pi = \frac{1}{3}$, le pied-droit ne saurait glisser sur sa base ; on voit aussi, en supprimant le terme fHZ, que la voûte ne peut pas non plus glisser sur le pied-droit.

Je terminerai cet article par un exemple numérique. Soit $b = 30$; $H = 40$; $k = 1$.

Si l'on fait $\alpha = 45°$ (ce qui est l'hypothèse de la Hire) dans l'équation (a), elle donne $Z = 6,56$.

Si dans la même équation on fait $\alpha = 0$, ce qui est l'hypothèse du coin sans frottement, elle donne pour le *maximum* de Z, $Z = 7,94$; l'équation (b) aurait donné le même résultat.

Si l'on emploie l'équation (c), ce qui est l'hypothèse de deux arcs-boutans comprenant chacun la demi-voûte, on a $Z = 4,92$. Mais il faut observer que ce n'est pas l'arc-boutant de 90° qui donne la plus grande poussée; l'arc qui la donne est variable et long à trouver.

Si on fait usage de la formule (d), on a $Z = 4,48$.

Enfin par la formule (28) du n° 28, on trouve $Z = 5,10$.

Ce dernier résultat est celui qu'il faut préférer ; il donne la limite de la plus grande valeur de Z : si la formule de la Hire donne une valeur encore plus grande, c'est parce qu'elle est fausse ; c'est parce qu'elle ne tient pas compte du frottement : si on y a égard, on a un résultat plus faible.

30. *Berceau en demi-ellipse*. La figure 24 représente un demi-ber-

ceau elliptique qu'on a construit en traçant d'abord une ellipse $\alpha\beta$, et en lui menant ensuite deux courbes parallèles, à égale distance. Par cette construction, l'intrados et l'extrados ne sont point des ellipses, quoiqu'ils aient la même développée qu'elles.

Cette voûte est de la première espèce, et sans le frottement, la clef exercerait le *maximum* de poussée : cette résistance éloigne le *maximum* de ce point. Il faudra trouver F par l'équation (23), en observant qu'on a ici $M = ks$: ce calcul est assez long; on trouvera ensuite Z par l'équation (24).

Si l'ellipse est surbaissée, il vaudra mieux employer les formules (29) déduites de l'hypothèse des arcs-boutans. Si l'on veut éviter la longueur du calcul, on pourra supposer que le *maximum* de F a lieu aux naissances, ce qui donnera Z un peu trop petit. L'arc-boutant embrassant la demi-voûte, le calcul devient très-simple au moyen des tables ci-après. La première donne la distance D de la montée à la verticale passant par le centre de gravité du quart d'ellipse; la seconde fait connaître la longueur s de ce quart d'ellipse, et l'on a $S = ks$. Dans la première, $O\beta$ ou b' a été supposé $= 1$; dans la seconde, le demi-grand axe a été fait $= 1$.

On verra que dans l'hypothèse des arcs-boutans embrassant chacun la demi-voûte, l'équation (29) du n° 28 donne $F = \frac{ks(b-D)}{a+k}$. Ayant les valeurs de S, F, l'équation (29) devient

$$\left.\begin{array}{l} Z = -\frac{ks}{fH} + \sqrt{\frac{k^2s^2}{f^2H^2} + \frac{2F}{f} + \frac{2k^2s}{fH}} \cdots \\ F < \pi\,(ks + fHZ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (a).$$

Ces formules supposent que le centre de gravité de l'aire $SS'aA$ est le même que que celui du quart d'ellipse $\alpha\beta$: cela serait rigoureux, si l'ellipse passait par les centres partiels de gravité de tous les voussoirs; mais l'erreur est peu sensible; d'ailleurs il serait aisé de la corriger.

La valeur de Z donnée par la formule (a) sera un peu trop petite. On aura la plus grande limite en employant l'hypothèse du coin sans frottement, c'est-à-dire les équations (28) du n° 28, qui fourniront les formules suivantes, en observant qu'ici on a

$r = \frac{'b^2}{a'}$,

$$\left.\begin{array}{l} Z = -\frac{ks}{f\mathrm{H}} + \sqrt{\frac{k^2s^2}{f^2\mathrm{H}^2} + \frac{k}{f}\left(\frac{2'b^2}{a'} + k\right)} \ldots \\ \frac{k\,b'^2}{a'} + \frac{1}{2}k^2 < \pi\,(ks + f\mathrm{H}Z) \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (b).$$

Supposons, pour faire une application des tables, $b = 8$; $k = 2$; $a = 7$; d'où $a' = 8$; $b' = 9$.

Le b' de la table ayant été supposé $= 1$, il faudra aussi faire le a' de la table $= \frac{8}{9} = 0{,}8888$, pour avoir la valeur correspondante de D. Je prends dans la première table, la différence 0,0122 entre 0,6133 et 0,6255, nombres correspondans à 0,8 et 0,9, entre lesquels tombe 0,8888; puis je fais cette proportion 0,9 — 0,8 ou 0,1 : 0,9 — 0,8888 ou 0,0112 :: 0,0112 : un quatrième terme qu'on trouve être 0,0014; retranchant ce nombre de 0,6255, il vient 0,6241 qui étant multiplié par 9, donne 5,6169 pour la valeur de D.

En prenant de même des parties proportionnelles dans la seconde table, on trouvera $s = 13{,}363$. Il ne reste plus qu'à substituer les valeurs de D et s dans les formules ci-dessus.

Table pour la détermination du centre de gravité d'un quart d'ellipse, la demi-base b' *étant un.*

a' ou montée moyenne.	D ou distance OG'	a' ou montée moyenne.	D ou distance OG'.	a' ou montée moyenne.	D ou distance OG'.	a' ou montée moyenne.	D ou distance OG'.
0,0	0,5000	0,7	0,5999	1,4	0,6720	2,1	0,7098
0,1	0,5055	0,8	0,6133	1,5	0,6788	2,2	0,7151
0,2	0,5198	0,9	0,6255	1,6	0,6851	2,3	0,7170
0,3	0,5365	1,0	0,6366	1,7	0,6910	2,4	0,7205
0,4	0,5534	1,1	0,6464	1,8	0,6963	2,5	0,7236
0,5	0,5698	1,2	0,6559	1,9	0,7014		
0,6	0,5854	1,3	0,6644	2,0	0,7057		

Table des longueurs des quarts d'ellipses dont le demi-grand axe est un.

Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.	Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.	Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.	Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.
0,00	1,0000	0,30	1,0967	0,60	1,2764	0,90	1,4933
0,05	1,0075	0,35	1,1227	0,65	1,3106	0,95	1,5318
0,10	1,0188	0,40	1,1506	0,70	1,3456	1,00	1,5708
0,15	1,0337	0,45	1,1802	0,75	1,3815		
0,20	1 0519	0,50	1,2110	0,80	1,4181		
0,25	1,0730	0,55	1,2433	0,85	1,4554		

31. *Berceau parabolique.* Supposons que la voûte représentée par la figure 25, soit formée d'une parabole $\alpha\mathfrak{C}$, à laquelle on a mené de part et d'autre et à égale distance, deux courbes parallèles, pour avoir l'intrados et l'extrados qui ne seront pas des paraboles, quoiqu'ils aient la même développée qu'elle.

En faisant $O\alpha = a'$, $O\mathfrak{C} = b'$, et conservant les autres notations, l'équation de la parabole $\alpha\mathfrak{C}$ sera $y^2 = px = \frac{b'^2 x}{a'}$: on aura $M = ks$; $\tang \alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$: donc $\frac{M}{\tang \alpha} = \frac{kps}{2y}$: la poussée horizontale sera un *maximum* quand $\frac{s}{y}$ en sera un, c'est-à-dire à l'infini sur la courbe : la voûte est donc de la seconde espèce, ainsi qu'on pouvait le déduire des principes des n°s 26 et 25.

Il faudra chercher F par l'équation (23) dans l'hypothèse du coin avec frottement, et par l'équation (27) du n° 27, dans l'hypothèse des arcs-boutans; je ne rapporte pas ces calculs auxquels on ne doit avoir recours que lorsqu'on aspire à beaucoup d'exactitude. Il sera suffisant pour l'ordinaire, de chercher F par l'équation (26) de la seconde hypothèse.

Ayant trouvé F, l'une ou l'autre des équations (29) et (28) donnera Z en y substituant les valeurs de D′ et $S = ks$.

On a $D' = AR' = A\mathcal{C} \sin \alpha = \frac{kdx}{2ds}$, qu'on trouve être $D' = \frac{a'k}{\sqrt{'b^2 + 4'a^2}}$; on pourra se contenter de faire $D' = \frac{1}{2}k$: on a aussi $s = \int \frac{dy}{p} \sqrt{p^2 + 4y^2}$, intégrale qu'on trouve être

$$\frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + 4y^2} + \frac{p}{4} \log \frac{1}{p} (2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}),$$

et qui, en mettant b' pour y, et $\frac{'b^2}{a'}$ pour p, devient

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{'b^2 + 4'a^2} + \frac{'b^2}{4a'} \log \frac{1}{b'} (2a' + \sqrt{'b^2 + 4'a^2}).$$

Il faut se rappeler dans l'emploi de cette équation, de multiplier les logarithmes ordinaires des tables par 2,302585.

Si on veut avoir la limite de Z en négligeant le frottement, on prendra la valeur de F donnée par l'équation $F = S \cot \alpha$.

Pour avoir la pression P qu'éprouve un voussoir quelconque, on fera usage des équations (25), (25′) du n° 26.

Après avoir rapporté les différentes formules propres à faire trouver Z, il faut toujours se souvenir que cette vraie valeur de Z est impossible à trouver, et qu'il n'y a rien de mieux à faire que d'adopter la limite donnée par les formules (29) : il faut appliquer cette conséquence aux voûtes dont je parlerai dans les articles suivans.

32. *Berceau en chaînette.* La figure 25 représente ici un berceau construit en menant à la chaînette $a\mathcal{C}$ deux courbes parallèles. J'ai démontré dans les nos 13 et suivans, que ce berceau est équilibré ; ainsi les formules du n° 24 s'appliquent à la voûte proposée.

En conservant toujours les mêmes notations, on a ici $M = ks$, $\tang \alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{s}{c}$ (*voyez* le n° 13). Le rayon de courbure de la

chaînette

chaînette intermédiaire à la clef, ou $r=c$ (*voyez* le même numéro); et celui d'intrados $=r=c-\frac{1}{2}k$; $K=k$; $D'=\frac{1}{2}k\sin\alpha=\frac{1}{2}k\frac{dx}{ds}=\frac{ks}{2(a'+c)}$; $h'=6R'=\frac{1}{2}k\frac{dy}{ds}=\frac{\frac{1}{2}kc}{a'+c}$; $s=\sqrt{a'^2+2a'c}$. Quant à la valeur de c, elle est donnée en fonction de a' et b', qui sont ici ce que a et b étaient dans le n° 13. Enfin, abstraction faite du frottement, on connaîtra toutes les quantités qui entrent dans les formules (21) du n° 24, ou dans ce cas $r=c-\frac{1}{2}k$. En faisant les substitutions dont j'ai parlé dans les formules du n° 24, elles deviennent

$$\left.\begin{array}{l}(h'+H)(s^2-'a^2)\frac{k}{a'}=2ks(Z-D')+fHZ^2\ldots\\(s^2-'a^2)\frac{k}{a'}<\pi(2ks+2fHZ)\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots(a).$$

Exemple. Soit $a'=b'=30,5$; $k=1$; $H=40$: il faut d'abord trouver la longueur s de la demi-chaînette $\alpha 6$.

Je cherche dans la table du n° 13 l'endroit où x et y ont entre eux le rapport 1 qui est demandé : je vois que cela aura lieu pour x entre 40,00 et 40,93, et pour y entre 40,24 et 40,62. Soit q la fraction par laquelle il faut multiplier $\Delta x=0,93$ et $\Delta y=0,38$, pour que x et y augmentés de cette fraction de différence première, deviennent égaux : on aura $x+q\Delta x=y+q\Delta y$; d'où l'on tire $q=\frac{y-x}{\Delta x-\Delta y}$. On a dans le cas présent, $q=\frac{24}{55}=0,44$; $q\Delta x=0,40$; $q\Delta y=0,16$: donc les nouveaux x et y intercalés dans la table, sont égaux quand ils sont chacun 40,40; mais alors s devient $s+q\Delta s$, c'est-à-dire 60,44. Il ne reste plus, pour avoir les valeurs de a', c et s, que de multiplier 40,40; 60,44 et le c de la table $=25$ par $\frac{30,5}{40,40}$ ou 0,755; ce qui donne $s=45,63$; $c=18,89$.

Mettant donc dans l'équation (21) du n° 24, 1 pour k; 30,5 pour a' et b'; 40 pour H; 45,63 pour s ; et pour c, 18,89, valeur qu'on aurait aussi trouvée par l'équation $c=\frac{s^2-'a^2}{2a'}$, on trouvera $Z=5,19$. Nous avons vu dans l'article du berceau circulaire, que l'hypothèse de la Hire a donné $Z=6,56$. Le frottement a été négligé dans les deux cas.

M. Bossut a donc eu tort de dire (*Dynamique*, équilibre des voûtes,

n° 9, pag. 399) que les voûtes en chaînette ont une poussée considérable, puisqu'on vient de voir qu'elle est moindre que pour les berceaux en demi-cercle. Les constructeurs doivent, sous tous les rapports, préférer la chaînette pour les berceaux, à moins qu'ils ne doivent être chargés de poids étrangers qui détruiraient l'équilibre.

Quant au glissement, il sera aisé de vérifier qu'il n'y en aura pas.

M. Bossut est tombé dans une autre erreur : il a pris pour intrados une chaînette, et au lieu de lui mener intérieurement et extérieurement deux courbes parallèles, il n'a mené que celle qui est extérieure : j'ai fait voir qu'alors le berceau n'est plus équilibré.

Je finirai cet article par un problème qui n'a pas un rapport immédiat avec notre objet, mais qui est curieux. On demande quelle longueur il faut donner à une corde pesante qui doit être attachée à deux points fixes situés à la même hauteur, pour que la tension ou l'effort qui a lieu en ces deux points soit la plus petite possible. On sent que si la corde est très-courte, elle exercera un très-grand effort ; qu'il en sera de même si elle est longue : il existe entre ces deux extrêmes un *minimum* qu'il faut trouver.

On verra que la tension de la corde est $\frac{ks}{\sin \alpha}$, ou $\frac{ksds}{dx}$, ou (n° 13), $k(a'+c)$: ainsi la quantité qui doit être un *minimum* est $a'+c$. J'y substitue pour a' sa valeur en b' (*voyez* n° 13) ; je différentie ensuite, en faisant varier c et regardant b' comme constant : égalant la différentielle à zéro, on en tire $e^{\frac{2b'}{c}} = \frac{b'+c}{b'-c}$: on trouve que pour satisfaire à cette équation, il faut que b' valant un, c soit $\frac{1}{1,19955}$, et alors la valeur qui en résulte pour a', est 0,6751 ; c'est-à-dire que la distance du point le plus bas de la chaîne à l'horizontale passant par les deux points de suspension, doit être environ le tiers de la distance entre ces deux points. Ce résultat peut avoir des applications utiles dans la Mécanique.

Si l'un des bouts de la corde étant fixe, l'autre était roulé sur un treuil situé à même hauteur que le point fixe, la puissance appli-

quée à la manivelle du treuil serait un *minimum*, lorsque le rapport trouvé ci-dessus entre a' et b' aurait lieu. La pression qu'une voûte équilibrée, abstraction faite du frottement, exerce sur les impostes, est $\frac{s}{\sin\alpha}$: elle est dont aussi un *minimum* quand le rapport ci-dessus existe entre la base et la montée.

Au reste il ne faut pas confondre la pression avec la poussée ; celle-ci est constante et a pour expression kc ; elle est la même pour un arc quelconque de la même courbe ; elle augmente dans le rapport de c quand on passe d'un individu de la même famille à un autre. Ainsi c étant le rayon de courbure à la clef, il s'ensuit que plus la voûte est aplatie, plus la poussée est grande. C'est par la même raison que plus une corde approche de l'horizontale, plus sa poussée, c'est-à-dire l'effort qu'elle fait horizontatement pour rapprocher les deux points de suspension, est considérable.

33. *Berceau parabolique équilibré.* Dans le n° 31, le berceau parabolique n'était pas équilibré : ici l'intrados est une parabole, et l'extrados a été calculé d'après le n° 11, de manière à faire décroître l'épaisseur depuis la clef, afin d'obtenir un berceau équilibré. Ainsi les formules qui conviennent sont celles du n° 24, abstraction faite du frottement.

La voûte proposée est représentée par la figure 9. En conservant toujours les mêmes notations, on a ici le rayon de courbure à la clef, ou $r = \frac{1}{2} p = \frac{b^2}{2a}$, et de plus (*voyez* le n° 31), $D' = \frac{ak}{\sqrt{b^2+4a^2}}$; $h' = \frac{\frac{1}{2} bk}{\sqrt{b^2+4a^2}}$; tang $\alpha = \frac{2a}{b}$. Substituant ces valeurs dans les équations (21) du n° 24, on aura celles qui conviennent au berceau proposé.

M. Bossut (*Dynamique*, n° 19, pag. 408) suppose que toutes le forces agissent sur l'intrados, ce qui revient à supposer que l'intrado est chargé de tous les poids des voussoirs, comme s'ils y étaien attachés par des fils, et que la voûte n'eût aucune épaisseur ; on voi que c'est une erreur : il en a commis une autre en faisant, dans la figure, croître l'épaisseur depuis la clef. Au reste cet Auteur n'a jamais fait entrer le frottement dans ses calculs. J'ai donné les

moyens d'en tenir compte lorsqu'on aspire à plus d'exactitude. Je n'aurais pu entrer dans ce détail pour chaque espèce de voûte, sans passer les bornes que je me suis prescrites.

Au reste, il faut toujours se rappeler que le problème de la poussée ne comporte que des solutions approchées. Dans l'impossibilité d'avoir la vraie valeur de Z, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est d'adopter la limite fixée par les formules que j'ai données.

34. *Voûtes en arc de cloître*. Je ferai usage dans cet article et dans le suivant, de l'hypothèse des arcs-boutans, parce que la limite qu'elle fournit procure une solution assez approchée.

Pour concevoir la voûte dont il s'agit, il faut imaginer deux demi-cylindres d'égal diamètre, se penétrant l'un l'autre, de manière que leurs axes se rencontrent perpendiculairement, leurs deux surfaces seront partagées en huit nappes, quatre égales par dessus ou en dehors, et quatre égales en dedans : les quatre premières forment une voûte d'arête; les quatre dernières, la voûte en arc de cloître. Nous allons examiner les conditions d'équilibre dans la dernière espèce.

La figure 26 représente le plan de la voûte; ABB'A' est le quarré recouvert par la voûte; AOB, BOB', B'OA', A'OA, sont les projections des quatre nappes cylindriques, qui se manifestent en forme de pyramide, à la clef dont O est la projection; la première et la troisième appartiennent au même cylindre; la seconde et la quatrième font partie de l'autre cylindre.

La figure 27 représente la section faite par un plan vertical élevé sur la ligne TT' (fig. 26) : on y voit que TP est l'épaisseur des murailles ou pieds-droits, QP l'épaisseur de la voûte; que PQ*r*R, P'Q'*r*'R', sont des portions de la voûte appartenantes aux nappes AOB, A'OB'.

Cela posé, voici comment on peut concevoir l'équilibre de la voûte : chaque nappe est composée de tranches par des plans verticaux perpendiculaires à l'axe du cylindre, et chaque voussoir d'une même tranche a deux faces dans ces plans, et deux autres dirigées à l'axe.

Imaginons quatre points symétriquement placés sur les arêtes de la voûte, et dont M, M', N', N, soient les projections ; à ces quatre points aboutissent huit arcs égaux de la voûte ; ces 8 arcs se contrebalancent mutuellement deux à deux : ainsi (fig. 27) les deux arcs PQrR, P'Q'r'R' se font équilibre, en s'appuyant, d'une part, contre les pieds-droits, de l'autre, en se poussant par l'intermède de la portion rectiligne de voûte Rrr'R'.

Il s'agit d'évaluer l'effet de l'arc PQrR pour faire tourner le pied-droit autour du point C, et de sommer la poussée de tous les arcs pareils pour avoir l'effet total. On suppose que la muraille qui forme le pied-droit, est liée de manière à ne former qu'un seul massif ; car on sait que les poussées des différens arcs étant variables, si le pied-droit n'était pas d'une seule pièce, il pourrait être renversé dans la partie du milieu, sans l'être dans les angles.

Soit le rayon intérieur des cylindres $= \frac{1}{2}$ AB $=$ HP $= a$, l'épaisseur PQ de la voûte $= k$, la hauteur des pieds-droits PD $=$ H, leur largeur DC $=$ Z, GG' la verticale qui passe par le centre G de gravité de la portion de voûte PQrR, RM $= x$.

Il faudrait pour résoudre le problème rigoureusement, chercher le centre de gravité de l'espace PQrR, ce qui conduit à des résultats compliqués : nous supposerons que ce centre est le même que celui de l'arc $\alpha\beta$ dont le rayon est $a + \frac{1}{2} k$, ce qui est sensiblement vrai ; nous supposerons encore, pour la facilité de l'intégration, que la portion de voûte PQrR s'appuie par le point α, au lieu de r, dans l'instant de la chute, ce qui est suffisamment exact.

En faisant, pour simplifier, $a + \frac{1}{2}k =$ H$\beta = r$, on trouve d'abord

$$PG' = a - \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}}{s} \ldots\ldots\ldots \text{(en nommant } \alpha\beta = s\text{)}.$$

En se rappelant ce que nous avons dit n° 23, on verra que G'g représentant le poids de l'espace PQrR, la force horizontale, qui agit en P pour renverser le pied-droit, sera représentée par PG' : or on a PQrR $= ks$ et G'$g = \sqrt{r^2 - x^2}$; la poussée, exprimée par $\frac{ks \cdot PG'}{G'g}$, sera donc $\frac{aks}{\sqrt{r^2 - x^2}} - kr$. Cette quantité étant multipliée par Pp (fig. 26), épaisseur d'une tranche verticale de la nappe, donnera la poussée de cette tranche ; et en l'intégrant, on aura la poussée de toute la nappe.

Or on a $AP = PM = a - x$, d'où $Pp = d(AP) = -dx$. L'expression de la poussée de la tranche élémentaire dont $PpmM$ est la projection, devient donc $-\frac{aksdx}{\sqrt{r^2-x^2}} + krdx$; mais on a $ds = \frac{-rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}$, ce qui change l'expression ci-dessus en celle-ci : $\frac{aksds}{r} + krdx$, dont l'intégrale est $\frac{aks^2}{2r} + krx + c$. Cette quantité doit être zéro, lorsque $s = 0$ et $x = r$, ce qui donne $c = -kr^2$: de plus, elle doit être complète pour toute la demi-nappe, quand $s =$ le quart de cercle $= \frac{3,14116r}{2}$, et $x = 0$. Faisant ces substitutions, on a pour la poussée horizontale de la demi-nappe AOB, l'expression $\frac{1}{8}(3,1416)^2akr - kr^2$, et pour la nappe entière, $2kr(12337a - r)$.

Pour avoir le poids de la voûte, ou la résultante de toutes les forces verticales qui pressent le pied-droit aux différens points P, et dont chacune est exprimée par ks, il faudra intégrer $-ksdx$: on a $\int -ksdx = -ksx + \int kxds = -ksx + \int \frac{-krxdx}{\sqrt{r^2-x^2}} = -ksx + kr\sqrt{r^2-x^2}$, quantité à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter, parce qu'elle devient zéro, quand $x = r$ et $s = 0$: en y faisant $x = 0$, on a pour la demi-nappe, kr^2, et pour la nappe entière, $2kr^2$. Remarquons que la somme des pressions verticales est le poids même du quart de voûte ; ce poids ou ce volume étant divisé par k, doit donner la surface : cette surface est donc ici $2r^2$, c'est-à-dire le double de l'aire de sa projection AOB, résultat aussi simple que remarquable. En égalant le moment de la poussée horizontale autour du point C, à ceux du poids du quart de voûte et du pied-droit ; pour plus de généralité, j'appelle f la densité comparée à celle 1 de la voûte ; on a l'équation d'équilibre,

$$2krH(1,2337a - r) = 2r^2kZ + \frac{fHZ^2}{2}(2a + Z).$$

En appelant toujours π la fraction qui exprime le rapport du frottement à la pression, la condition qu'il n'y ait pas de glissement dans les pieds-droits, sera exprimée par l'inégalité suivante :

$$2kr(1,2337a - r) < \pi[2r^2k + fHZ(2a + Z)].$$

Il est utile encore de connaître le volume renfermé sous la voûte, ou compris entre elle et le quarré de la base. En appelant s' l'arc PR (fig. 27), on voit qu'il faudra ajouter toutes les tranches élémentaires qui ont P*pm*M pour projection horizontale, et le demi-segment PRM pour projection verticale : or on a PRM $= \frac{1}{2} as' - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$; l'épaisseur de la tranche verticale ci-dessus est dx : on a donc, pour le volume d'une portion de l'espace couvert par la nappe $\int -\frac{1}{2} as'dx + \frac{1}{2}\int xdx \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} as'x + \frac{1}{2}\int axds' - \frac{1}{6}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} as'x + \frac{1}{2}\int \frac{-a^2xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{6}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} as'x + \frac{1}{2} a^2 \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{6}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, quantité à laquelle il ne faut point ajouter de constante, parce quelle est nulle d'elle-même, quand $s' = 0$ et $x = a$: en y faisant $x = 0$, on a $\frac{1}{3} a^3$ pour le volume recouvert par la demi-nappe, et par conséquent $\frac{8}{3} a^3$ pour celui recouvert par la voûte entière.

Nous avons vu que la surface de la voûte est double de celle de sa base : nous venons de trouver que le volume qu'elle embrasse est $\frac{8}{3} a^3$, c'est-à-dire les $\frac{2}{3}$ du parallélipipède circonscrit : ces propriétés sont les mêmes que pour une voûte hémisphérique, propriété simple et curieuse.

35. *Voûte d'arête.* Nous avons expliqué dans le problème précédent, la génération de la voûte d'arête en même temps que celle de la voûte en arc de cloître : la figure 28 est le plan de la voûte d'arête ; *ad'b'b* est le quarré qui lui sert de base, ou qui est recouvert ; AELF est un des quatre piliers égaux qui supportent les quatre angles de la voûte ; la figure 29 est la section faite par un plan vertical élevé suivant QQ' (fig. 28) ; la figure 30 est la section faite par un plan vertical passant par la diagonale EE'' de la fig. 28 : dans ces figures on a ponctué les lignes qui n'ont pas de réalité, et qui ne servent qu'aux démonstrations.

Voici comment il faut concevoir l'équilibre dans cette voûte. Soient M, M', N', N, les projections horizontales (fig. 28) de quatre points symétriquement placés sur les arêtes de la voûte ; imaginons qu'on ait conduit par ces points, pris deux à deux, quatre plans verticaux et infiniment près de ceux-ci, quatre autres plans pa-

rallèles; ces quatre plans fourniront quatre sections égales à celles de la figure 29.

Cela posé, voici ce qui arrive au moment où les pieds-droits sont près à être renversés. Chacun des quatre arcs dont MM′, M′N′, M′N, NM sont les projections, et dont (fig. 29) Rrr′R′ est le profil, s'ouvre dans son milieu Z à l'intrados; les deux moitiés se contre-balancent en se buttant à l'extrados en Z; les extrémités inférieures de ces demi-arcs pèsent de tout leur poids en R (fig. 30), sur l'arête elliptique qu'on peut se représenter comme étant une courbe solide; cette ellipse se trouve ainsi chargée des poids variables des arcs ZR, qui croissent depuis S jusqu'à l'extrémité a du grand axe; la résultante de tous ces poids, pour le quart de voûte aVOV′, sera égale au poids de ce quart de voûte, et passera par un point X′ de la diagonale AO. Alors on pourra concevoir (fig. 30) quatre forces AY, XX′, AX′, XY, dont la première et la troisième ont une résultante égale et directement opposée à celle de la seconde et de la quatrième (*voy.* le n° 23); AX′ représentera la force qui tend à renverser le pilier suivant sa diagonale, si XX′ représente le poids du quart de voûte : il faut donc chercher l'expression de AX′.

Soit (fig. 29) a le rayon du cylindre de l'intrados $=$ HZ ; soit $Zz = k$ l'épaisseur de la voûte, $Ma = x$, $ay = s$, $Hy = a + \frac{1}{2}k = r$.

On a $RrzZ = ks$: le poids de l'arc qui presse en M (fig. 28) ou en R (fig. 29 et 30), sera $ks \, . \, Hh$. Mais on a $HM = \sqrt{r^2 - x^2}$ (fig. 29), et (fig. 28) HO $=$ HM, à cause du triangle MOH isoscèle : donc $Hh = d\,(OH) = \frac{-xdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$; donc le poids des deux arcs élémentaires ou tranches ayant pour projection MHhm et MH′$h'm$, qui agissent dans la verticale passant par M, sera $\frac{-2ksdx}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Pour avoir la distance AX′ du centre de gravité cherché, il faut multiplier la somme de tous les poids ci-dessus par leur distance AM, et diviser le produit par la somme des poids, c'est-à-dire par le quart de la voûte. Or on a $AM = \sqrt{2}\,(a - \sqrt{r^2 - x^2})$; la quantité à intégrer est donc $\frac{-8^{\frac{1}{2}}aksxdx}{\sqrt{r^2-x^2}} + 8^{\frac{1}{2}}ksxdx$. Si l'on fait attention que $ds = -\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}$;

et

et qu'on intègre par parties, on trouvera pour l'intégrale,

$$2^{\frac{1}{2}}ksx^2+8^{\frac{1}{2}}aks\sqrt{r^2-x^2}+8^{\frac{1}{2}}akrx-\tfrac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}krx\sqrt{r^2-x^2}-\tfrac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}kr^2s+c.$$

On détermine la constante c, en observant qu'à la clef l'intégrale doit être nulle, et qu'alors on a $s=0$, $x=r$; on la complète en faisant ensuite $x=0$, $s=1,5708r$, pour qu'elle embrasse toute la ligne OA. Par là, elle devient

$$8^{\frac{1}{2}}kr^2(0,5708.a-0,3927.r).$$

Divisant cette quantité par le volume du quart de voûte (qui s'obtient en retranchant le quart de la voûte en arc de cloître, de la portion correspondante du berceau cylindrique), lequel est $1,1416kr^2$, on a, pour la distance cherchée,

$$AX'=\frac{8^{\frac{1}{2}}}{1,1416}(0,5708a-0,3927.r),$$

ou $AX'=1,4141a-0,9729r$; Quant à la force effective, qui pousse horizontalement le pilier suivant X'A (fig. 30), elle est égale au poids du quart de voûte, multiplié par $\frac{AX'}{XX'}$, c'est-à-dire, à

$$\frac{1,1416kr^2(1,4141a-0,9729r)}{a+k},\text{ ou }\frac{kr^2}{a+k}(1,6143a-1,1107r).$$

Multipliant cette force par la hauteur $AD=H$ du pilier, on aura son moment autour du point C. Multipliant le quart de la voûte par $\sqrt{2}Z$ [en appelant Z le côté AL du pilier (fig. 28)], on aura le moment de la pression de la voûte sur le pilier. Enfin, multipliant le poids fHZ^2 du pilier dont la densité est f, par $\frac{1}{2}\sqrt{2}Z$, on aura le moment de ce pilier. Égalant le premier moment à la somme des deux autres, on aura, réduction faite, l'équation d'équilibre

$$\frac{kr^2H}{a+k}(2,2832a-1,5708r)=2,2832kr^2Z+fHZ^3.$$

La condition qu'il n'y ait pas de glissement dans le pied-droit,

10

sera exprimée par l'inégalité suivante (π étant le rapport du frottement à la pression) :

$$\frac{kr^2}{a+k}(1{,}6143\,a - 1{,}1107.r) < \pi\,(1{,}1416\,kr^2 + f\mathrm{HZ}^2).$$

On trouve le volume de l'espace recouvert par la voûte d'arête, en retranchant le volume de la voûte en arc de cloître, de deux fois le volume du berceau cylindrique, et l'on a $3{,}6165\,a^3$, en appelant a le rayon de l'intrados ou du vide du berceau.

Observation. Je place ici, pour la commodité de ceux à qui l'analyse n'est pas familière, quelques formules moins exactes, mais plus simples.

Soit r = rayon moyen du cylindre générateur, M = poids d'une nappe ou quart de voûte, P = poids du quart de tout le massif des pieds-droits ou murs du pourtour, a = rayon de l'intrados, H leur hauteur, et Z leur épaisseur.

Il n'y aura pas de renversement dans la voûte en arc de cloître, si l'on a $0{,}23\,\mathrm{MH} < \mathrm{MZ} + \frac{1}{2}\mathrm{PZ}$.

Il n'y aura pas glissement des pieds-droits, si l'on a

$$0{,}223\,\mathrm{M} < \pi\,(\mathrm{M}+\mathrm{P}).$$

On a aire de la voûte entière $= 8r^2$.

Capacité qu'elle recouvre $= \frac{8}{3}a^3$.

Voûte d'arête. M = poids du quart de la voûte, P = poids de l'un des piliers, H sa hauteur, Z le côté de sa base, A le rayon du cylindre d'extrados, a celui d'intrados.

Il n'y aura pas de renversement, si l'on a $0{,}31\,\mathrm{MH} < \mathrm{MZ} + \frac{1}{2}\mathrm{PZ}$.

Il n'y aura pas glissement, si l'on a $0{,}31\,\mathrm{M} < \pi\,(\mathrm{M}+\mathrm{P})$.

Aire de la voûte entière $= 4{,}5664\,\mathrm{A}^2$.

Volume qu'elle recouvre $= 3{,}6165\,a^3$.

36. *Des Ponts.* Les ponts n'étant que des berceaux, tout ce que nous avons dit jusqu'à présent des seconds, s'applique aux premiers.

Cependant, comme les ponts sont ordinairement terminés par un extrados ou pavé sensiblement rectiligne et horizontal, nous examinerons ce cas, en supposant l'intrados circulaire.

Soit donc (fig. 12) un pont dont l'intrados SM″ est un arc de

cercle, et l'extrados S'N'' une ligne droite horizontale. En conservant toujours la notation convenue, on a ici

$$S = \tfrac{1}{2}(b+k)^2 \operatorname{tang}\alpha - \tfrac{1}{2} b^2\alpha.$$

On déduit aisément de la valeur de $S \cot \alpha$, que la voûte est de la seconde espèce : on le conclurait encore, en observant que l'extrados embrasse celui qui rendrait la voûte équilibrée.

La principale chose à faire, c'est de trouver la valeur de D, c'est-à-dire la distance de la montée au centre d'inertie de la demi-voûte. Pour cela, il faut prendre la différence entre le moment du triangle OS'N'' et celui du secteur OSM'', puis diviser cette différence par l'aire S.

Soit $M''D = H$, $M''H = 2h'$, $N''H = 2D'$, $OS = b$, $SS' = k$, $DC = Z$, $b + k = B$, $S'H = p = b \sin\alpha$; on a aire du triangle $OS'N'' = \tfrac{1}{2} B^2 \operatorname{tang}\alpha$, distance de la montée au centre de gravité de ce triangle $= \tfrac{1}{3} B \operatorname{tang}\alpha$, moment de ce triangle par rapport à la montée $= \tfrac{1}{6} B^3 \operatorname{tang}^2\alpha$; aire du secteur $OSM'' = \tfrac{1}{2} b^2\alpha$, distance de son centre d'inertie à la montée $= \frac{2b}{3\alpha}(1 - \cos\alpha)$, moment de ce secteur par rapport à la montée $= \tfrac{1}{3} b^3 (1 - \cos\alpha)$; ce qui donne $D = \frac{B^3 \operatorname{tang}^2\alpha - 2b^3(1-\cos\alpha)}{6S}$.

Il y a une attention à faire, à cause de la figure du pied-droit ; c'est qu'il faut retrancher le moment du petit triangle M''N''H, de celui du rectangle CDHB, pour avoir le moment du pied-droit à l'égard du point C. Cela posé, il ne reste plus qu'à substituer les valeurs de S et de D dans les formules suivantes, déduites des équations (29),

$$S(H+h')\frac{p-D+D'}{-\frac{1}{2}k+h'} = S(Z-D') + \tfrac{1}{2}fZ^2(H+2h') - 2fD'h'(Z-\tfrac{1}{3}D'),$$

$$S\frac{B}{p+2D'}(H+h') = S(Z-D') + \tfrac{1}{2}fZ^2(H+2h') - 2fD'h'(Z-\tfrac{1}{3}D'),$$

$$S\frac{p-D+D'}{-\frac{1}{2}k+h'}, \text{ ou } S\frac{B}{p+2D'} < \pi(S + fZ(H+2h') - 2fh'D').$$

Il faut observer qu'on a $p + 2D' = B \operatorname{tang}\alpha$, $2h' = B - b\cos\alpha$.

De plus, l'angle SOM' $= \alpha$ est un arc pris sur le cercle dont le rayon est un; ensorte que si $\alpha = 90°$, on a $\alpha = 1,5708$.

Si le pont était très-aplati, la première des équations ci-dessus exigerait une modification : il faudrait supposer que l'arc s'appuie sur le point M' et sur le point S'; alors cette équation deviendrait

$$SH\frac{P-D}{2h'} = SZ + \tfrac{1}{2}fZ^2(H+2h') - 2fD'h'(Z - \tfrac{2}{3}D').$$

On voit que le premier membre de l'équation relative au glissement deviendrait $S\frac{p-D}{2h'}$.

Si l'on voulait employer l'hypothèse du coin avec frottement, il faudrait faire usage des équations (23), (24), (22), comme on le verra dans l'article suivant, où les calculs sont plus simples : observons cependant qu'on peut toujours, dans chaque cas particulier, trouver le *maximum* de F et de Z, en cherchant par le tâtonnement les valeurs de α, qui rendent des *maximas*, les quantités dont les équations (23 et 24) indiquent les différentielles. Quand les expressions analytiques de ces équations sont compliquées, on peut encore, par quelques substitutions successives, approcher assez près du *maximum* cherché.

37. *Berceau plat.* On appelle berceau plat celui représenté par la figure 31, dont l'extrados et l'intrados sont deux lignes horizontales, et dont les joints concourent en un point commun O : cette voûte diffère de toutes les précédentes, en ce que les joints ne sont point perpendiculaires à l'intrados.

Soit OS $= a$, SS' $= k$, SA $= b$, Aa = K, $\mathfrak{C}$R' $= h'$, AR' = D, $h' = \frac{1}{2}k$, l'angle d'un joint quelconque avec la verticale $= \alpha$, A$\mathfrak{C}$R' $= \alpha'$.

On verra aisément qu'on a $S = k(a + \frac{1}{2}k)\tan\alpha' = k(b + \frac{1}{2}k)$, $M = k(a + \frac{1}{2}k)\tan\alpha$. Donc, sans le frottement, la poussée $M\cot\alpha$ serait $k(a + \frac{1}{2}k)$, et par conséquent constante : la voûte est donc équilibrée.

En observant que dans l'hypothèse des arcs-boutans, il faut prendre A et S' pour centres des mouvemens ou points d'appui de la demi-voûte, au moment de la rupture, on verra que les équations (29)

deviennent

$$\tfrac{1}{2}b(b+\tfrac{1}{2}k)\,\mathrm{H}=k(b+\tfrac{1}{2}k)\,\mathrm{Z}+\tfrac{1}{2}f\mathrm{HZ}^2,$$
$$k(2a+k)(\mathrm{H}+\tfrac{1}{2}k)=k(2b+k)(\mathrm{Z}-\mathrm{D}')+f\mathrm{HZ}^2.$$
$$\tfrac{1}{2}b(b+\tfrac{1}{2}),\ \text{ou}\ \ k(a+\tfrac{1}{2}k)<\pi[k(b+\tfrac{1}{2}k)+f\mathrm{HZ}^2].$$

Comme les calculs relatifs à cette voûte sont faciles, je vais chercher l'équation d'équilibre dans l'hypothèse du coin avec frottement. La première chose à faire est de chercher le *maximum* de F : on a $\mathrm{F}=\mathrm{M}\cot(\theta+\alpha)=k(a+\tfrac{1}{2}k)\times\operatorname{tang}\alpha.\cot(\theta-\alpha)$. Différentiant et faisant $d\mathrm{F}=0$, on trouve $\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$; équation qui, étant résolue, donne $\operatorname{tang}\alpha=\operatorname{séc}\theta-\operatorname{tang}\theta=0{,}7208$; d'où $\alpha=35°\,47'$, c'est-à-dire que α est le complément de $\theta+\alpha$, ou la moitié du complément de θ (en se rappelant que $\theta=18°\,26'$). On aurait tiré cette même conséquence de l'équation ci-dessus, sans prendre la peine de la résoudre. Ayant trouvé que le coin de plus grande poussée est de $35°\,47'$, on en tire $\mathrm{F}=0{,}5195\,k(a+\tfrac{1}{2}k)$.

Ayant trouvé F, il faudrait trouver son point d'application le plus favorable, par le moyen de l'équation (24); mais l'équation (*a*) du n° 28, fait voir tout de suite que le point cherché est aux naissances, puisqu'en ce point, h étant égal à zéro, la somme des trois momens est zéro, et que partout ailleurs elle est négative; d'où il suit que c'est le joint des naissances qui procure le *maximum* de Z. Cela posé, on trouve aisément les équations suivantes :

$$0{,}5195k\,(a+\tfrac{1}{2}k)(\mathrm{H}+\tfrac{1}{2}k)=k\,(b+\tfrac{1}{2}k)\left(\mathrm{Z}-\frac{bk}{2a}\right)+\tfrac{1}{2}f\mathrm{HZ}^2;$$
$$0{,}5195k\,(a+\tfrac{1}{2}k)<\pi\,(kb+\tfrac{1}{2}k^2+f\mathrm{HZ}).$$

Si $\frac{b}{a}$ était plus petit que 0,7208, la valeur de F changerait un peu, puisqu'alors le coin de plus grande poussée ne saurait être plus grand que celui formé par la voûte entière : il serait aisé de faire le changement convenable à la formule ci-dessus.

On voit qu'en ayant égard au frottement, la valeur de Z est bien plus petite qu'en le négligeant. On peut regarder la dernière formule comme approchant beaucoup plus près de la vérité que toutes les autres.

Cette voûte est très-propre à faire voir dans quel cas chacune des deux hypothèses est préférable. En effet si k est grand ainsi que a par rapport à b, il est évident qu'on ne peut employer que l'hypothèse du coin; c'est l'inverse dans le cas contraire.

SECTION V.

Du pied-droit d'égale résistance et du minimum *des matériaux.*

38. *Pied-droit d'égale résistance.* Jusqu'ici j'ai considéré les pieds-droits comme des massifs composés de molécules fortement adhérentes, et j'ai supposé que ces massifs ne pouvaient que se renverser ou glisser sur leurs bases, sans pouvoir se rompre; mais il peut arriver qu'un-pied-droit tende à se briser suivant une section horizontale ou par assises, comme il arriverait à une pièce de bois implantée verticalement, et qui serait tirée horizontalement par une puissance, avec cette différence qu'une colonne de pierre se rompt sans ployer. On peut se proposer de donner à la face extérieure du pied-droit, une figure telle, que la voûte et le pied-droit soient en équilibre, quelle que soit la hauteur du pied-droit, et qu'en même temps il résiste à la rupture avec une force égale dans toutes les sections horizontales : on peut appeler ce problème du nom de *pied-droit d'égale résistance.* M. Epinus s'est occupé de cette question dans les *Mémoires de Berlin,* année 1855; mais sa solution est fausse, parce qu'il n'a pas eu égard à la pression verticale de la voûte sur le pied-droit. Celle de M. Bossut, dans son ouvrage cité, est aussi imparfaite, comme je le ferai voir plus bas.

Soit (fig. 32) AadA′ la section de la voûte en berceau qui repose sur les plans inclinés Aa, A′a′ des coussinets AaI, A′a′I′, et qui fait effort pour les écarter : le poids de la voûte produit deux forces en E, l'une horizontale ou la poussée F qui tend à renverser le pied-droit en le faisant tourner autour du point N d'une section quelconque NQ, l'autre verticale S qui s'ajoute au poids du pied-droit. De plus, les molécules de chaque section horizontale NA du pied-droit, tiennent entre elles par une force d'adhérence dont l'expérience seule peut faire connaître l'intensité qui est cons-

tante, et qu'on peut se représenter comme de petits poids égaux, distribués uniformément sur la ligne NQ. Il faut pour l'équilibre, que le moment de la poussée soit pour chaque section, égal à la somme des momens des trois dernières forces verticales autour du point de rupture N.

Soit le poids de la demi-voûte SSTA $=$ S, AQ $= u$, QN $= z$, AE $=$ D′. (Si la densité de la voûte et des pieds-droits n'est pas la même, la lettre S sera le produit de l'aire par la densité relative de la voûte.)

Soit g la force ou le poids qu'il faudrait employer pour vaincre l'adhérence des molécules du pied-droit, distribuées sur une ligne $= 1$.

Le moment de la poussée F pour faire tourner l'aire AENQ autour du point N sera uF.

Le moment du poids de la voûte sera, dans le sens vertical, $S(z - D')$.

L'aire AENQ $= \int z du$. La somme des momens des élémens de cet espace à l'égard de l'axe AD, sera $= \frac{1}{2}\int z^2 du$. La distance NG′ du centre G d'inertie de cet espace sera $z - \frac{\int z^2 du}{2\int z du}$. Le moment de cet espace à l'égard du point N sera $\int z du \left(z - \frac{\int z^2 du}{2\int z du}\right)$, ou $z\int z du - \frac{1}{2}\int z^2 du$.

La somme des forces d'adhérence distribuées sur QN, sera gz. Le moment de la résultante de ces forces d'adhérence sera $\frac{1}{2} g z^2$.

Egalant le moment de la poussée à la somme des momens des trois forces verticales, on aura l'équation d'équilibre suivante

$$uF = S(z - D') + \tfrac{1}{2} g z^2 + z\int z du - \tfrac{1}{2}\int z^2 du \ldots\ldots (a).$$

Différentiant deux fois de suite cette équation, pour la débarrasser du signe $\int$, en observant de faire dz constant, on a

$$(2F - z^2)\, d^2u - 4z dz du = 2g dz^2.$$

Faisant $du = p dz$, on a

$$d^2u = dp dz.$$

Substituant, on a la transformée

$$(2F - z^2)\,dp - 4pz\,dz = 2g\,dz,$$

qui étant multipliée par le facteur $(2F - z^2)$ devient intégrable et donne

$$(2F - z^2)^2 p = 4gFz - \tfrac{2}{3}gz^3 + c\,;$$

d'où l'on tire, en mettant $\frac{du}{dz}$ pour p,

$$du = \frac{c + 4gFz - \frac{2}{3}gz^3}{(2F - z^2)^2}\,dz \ldots\ldots\ldots (b)\,;$$

équation qui s'intègre en partie algébriquement, en partie par logarithmes.

Pour déterminer la constante c, il faut remonter à l'équation (a), qui doit se vérifier pour le point E où le poids du pied-droit et la force d'adhérence sont nuls; ce qui réduit cette équation à $uF = S(z - D')$, qui donne $\frac{du}{dz} = \frac{S}{F}$. Substituant cette valeur de $\frac{du}{dz}$, ainsi que D', pour z dans l'équation (b), on en tire aisément la valeur de c.

Quant à la constante c' que la seconde intégration de l'équation (b) introduira, on la déterminera par la condition qu'au point E on doit avoir à la fois $u = 0$ et $z = D'$. On aura ainsi tout ce qu'il faut pour construire la courbe EC. Enfin, prenant AD de la grandeur qu'on veut donner à la hauteur du pied-droit, on aura $DC = Z$.

Si on néglige le frottement dans l'hypothèse du coin, on a $F = S \cot \alpha$, et la valeur ci-dessus de $\frac{du}{dz}$ devient $\frac{du}{dz} = \tang \alpha$; d'où l'on conclut aisément que la tangente de la courbe EC doit, au point E, être perpendiculaire sur le joint des naissances. Cela est aisé à comprendre. En effet, le poids du massif est alors nul; la courbe EC n'est plus qu'un petit élément rectiligne qui, pour soutenir la voûte formant coin, doit nécessairement être perpendiculaire aux faces de ce coin. C'est aussi ce que fait voir l'équation $uF = S(z - D')$, qui au point E devient $\frac{0}{0} = \frac{du}{dz} = \frac{S}{F}$.

M. Bossut (n° 21, pag. 413) s'est trompé en supposant tacitement qu'on

qu'on pouvait obliger la courbe EC à faire un angle quelconque avec le joint Aa : cet angle n'est point arbitraire, et il ne peut être que droit : ainsi la détermination de sa constante est entièrement fausse. Observons de plus que pour simplifier la question, il a placé l'origine E de la courbe à l'intrados A, ce qui serait impraticable dans l'exécution, attendu que la voûte ne saurait reposer sur un seul point.

Si le pied-droit, au lieu d'être d'une seule pièce, comme on l'a supposé dans l'article précédent, est composé de plusieurs tranches ou assises horizontales, ce qui a lieu ordinairement, il est aisé de sentir qu'alors c'est dans ces sections où l'adhésion est presque nulle, que la rupture tendra à se faire. La quantité g qui exprimait la force d'agrégation de deux molécules de pierres, sera beaucoup plus petite dans ce dernier cas où elle n'est plus que l'adhérence produite par le mortier : on pourra même la regarder comme nulle, et en faisant $g = 0$ dans les résultats de l'article précédent, on aura une solution plus conforme à ce qui a lieu dans la pratique de l'Architecture. Pour avoir plus de stabilité, il faudra augmenter un peu les valeurs de z données par le calcul.

On aura aussi un pied-droit d'égale résistance, c'est-à-dire qui dans toutes ses tranches horizontales opposera la même résistance, tant à la rupture qu'au renversement : ce pied-droit aura encore l'avantage d'être le plus petit possible en poids ou en volume.

Il est encore une dernière perfection à ajouter au pied-droit : il faut s'assurer qu'il ne glissera pas, soit sur la plate-forme, soit d'une assise à l'autre : cela se vérifie par l'inégalité suivante

$$F < \pi\,(S + \int z\,du) \ldots\ldots (c).$$

Il pourra arriver que la condition précédente se vérifie dans toute la hauteur du pied-droit, ou seulement dans une certaine étendue à partir de la base. Dans ce dernier cas, il faudra que la portion qui pourrait être désunie par le glissement, soit d'une seule pièce, ou que les assises en soient liées plus étroitement par des moyens quelconques.

39. Minimum *des matériaux*. Voici une question intéressante et qui peut trouver des applications dans l'Architecture. On veut faire

une voûte dont le rayon de la base, l'épaisseur de la voûte, la hauteur des pieds-droits et la nature tant de l'intrados que de l'extrados sont données : on demande quelles doivent être la montée et l'épaisseur des pieds-droits, pour que le volume total de la voûte et des pieds-droits soit un *minimum*, en conservant d'ailleurs l'équilibre entre la voûte et le pied-droit.

On voit que la quantité qui doit être un *minimum* est $S + HZ$. Supposons, pour faire une application, que l'intrados doive être une parabole ayant pour équation $y^2 = \frac{b^2 x}{a}$, et l'extrados une autre parabole ayant pour équation $'y^2 = \frac{(k+b)^2}{a+k} x'$. L'épaisseur à la clef et aux naissances sera k. On trouvera aisément

$$S = \tfrac{2}{3}(b+k)(a+k) - \tfrac{2}{3}ab = \tfrac{2}{3}k(a+b+k).$$

L'équation du *minimum* sera

$$d\left(\tfrac{2}{3}k(a+b+k) + HZ\right) = 0,$$

qui étant différentiée par rapport à Z et a, donne

$$-dZ = \frac{2k}{3H}da.$$

Pour simplifier les calculs, je regarderai la voûte comme un coin sans frottement et d'une seule pièce, reposant sur les impostes : alors l'équation d'équilibre de rotation sera

$$HS \cot \alpha = SZ + \tfrac{1}{2}HZ^2.$$

On a $$\cot \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}.$$

Après y avoir substitué les valeurs de cot α et S, je différentie l'équation d'équilibre, en ne faisant varier que Z et a, il vient

$$2bkH.da = 4a(ak + bk + k^2)dZ + 4kZ(2a + b + k)da$$
$$+ 3HZ^2.da + 6HaZdZ.$$

Substituant dans celle-ci la valeur trouvée pour dZ, on a l'équation finie

$$2bkH = -\frac{8ak^2}{3H}(a+b+k) + 4kZ(2a+b+k) + 3HZ^2 - 4akZ,$$

laquelle étant combinée avec l'équation d'équilibre, fera connaître les inconnues Z et a.

On sent que la solution donnera des résultats un peu différens, suivant l'hypothèse qu'on adoptera pour l'équation d'équilibre.

On pourrait soupçonner que, tout restant d'ailleurs de même, il existe une montée a qui procure un *minimum* pour Z; mais cela n'est pas : plus a augmente, plus Z diminue : il suffit, pour s'en convaincre, de mettre dans l'équation d'équilibre les valeurs de S et cot α, et de tirer ensuite la valeur de Z.

Si l'on veut connaître la marche de la poussée relativement à la variation de a, et savoir s'il existe un *minimum*, il faut faire $d\,(\mathrm{S}\cot\alpha) = 0$. Dans le même exemple, la quantité à différentier est $\frac{1}{3}bk + \frac{b^2k}{3a} + \frac{bk^2}{3a}$, quantité qui diminue à mesure que a augmente, et qui a pour limite $\frac{1}{3}bk$; c'est le *minimum* de la poussée qui a lieu quand la montée est infinie.

Si l'on veut savoir quand la poussée tangentielle ou la pression sur les impostes est un *minimum*, on aura $d\left(\frac{\mathrm{S}}{\sin\alpha}\right) = 0$, ou $d\left(\mathrm{S}\frac{ds}{dx}\right) = 0$, ou $d\left(\frac{2}{3}k\,(a+b+k)\sqrt{1+\frac{b^2}{4a^2}}\right) = 0$, on trouvera

$$a = \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}b^2(b+k)}.$$

CHAPITRE III.

DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LES VOUSSOIRS DES VOÛTES EN DOME A BASE CIRCULAIRE.

SECTION PREMIÈRE.

Problème général. ETANT donnée la courbe génératrice de la surface de l'intrados, trouver celle d'extrados, et réciproquement: ou bien, étant donné l'intrados générateur, trouver la loi des forces, et réciproquement.

40. *Équations générales.* On sait qu'on appelle *voûte en dôme à base circulaire*, celle qui est engendrée par la révolution d'une courbe plane autour d'un axe vertical qui est la montée du dôme. La surface de révolution qui en résulte, forme la surface d'intrados; la seconde surface engendrée par une seconde courbe plane qui embrasse la première, forme la surface d'extrados. Si l'on imagine que le cercle de la base de la voûte soit divisé en parties égales (fig. 33) et que par les points de division et par l'axe on ait mené des plans verticaux, la voûte sera partagée en un certain nombre de secteurs égaux symétriquement placés et se faisant équilibre deux à deux, en se buttant l'un contre l'autre par leur tranchant commun avec l'axe. Il faut de plus imaginer que les joints perpendiculaires à la courbe génératrice de l'intrados aient décrit dans le mouvement commun, des surfaces coniques: alors les surfaces d'extrados et d'intrados se trouveront partagées par des méridiens verticaux et par

des cercles parallèles horizontaux, en petits espaces trapézoïdaux : la voûte se trouvera formée de petits voussoirs ayant la forme de pyramides tronquées, et composés de six faces, savoir, deux trapèzes faisant partie des surfaces d'intrados et d'extrados, et quatre autres faces, deux planes et verticales et deux coniques, toutes quatre perpendiculaires à l'intrados.

Il est aisé de voir que les conditions d'équilibre entre les voussoirs de deux secteurs ou onglets opposés quelconques, seront les mêmes, et que la question se réduit à la recherche de cet équilibre pour avoir celui de toute la voûte.

Afin de trouver les conditions d'équilibre entre les deux secteurs infiniment petits ou voûtes élémentaires ci-dessus, imaginons une section verticale qui les partage chacun en deux parties égales : si P et Q sont les forces normales à l'intrados, et verticales qui agissent sur chaque point de la petite surface intérieure du voussoir, la résultante de ces deux espèces de forces sera nécessairement dans le plan de la section verticale ci-dessus : on sentira qu'on peut raisonner ici, comme nous l'avons fait pour les berceaux, le coin du milieu était une tranche verticale et d'une épaisseur constante, au lieu qu'ici ce coin est formé de deux onglets égaux dont l'épaisseur augmente depuis la clef : du reste, les conclusions sont absolument les mêmes.

Que la figure 4 soit donc la section verticale qui partage en deux parties égales les deux secteurs infiniment petits et opposés : P étant la force qui presse perpendiculairement chaque point de la surface de l'intrados, Pds sera celle qui presse chaque point de l'élément ds de l'intrados générateur, et $\frac{2myPds}{n}$ celle qui presse le petit trapèse de la surface d'intrados qui sert de base à un petit voussoir (en appelant m le rapport de la circonférence au diamètre, et n le nombre infiniment grand des secteurs).

On trouvera de même que Q étant la force verticale qui sollicite chaque point de la surface d'intrados, $\frac{2myQds}{n}$ est celle qui sollicite la base d'un voussoir élémentaire.

Comme il s'agit de comparer les efforts que les voussoirs d'un même onglet exercent les uns sur les autres, on peut concevoir par

la pensée, que l'onglet est réduit à la section moyenne qui passe par son milieu, ou, ce qui revient au même, que les forces qui agissent sur la base d'un voussoir, sont concentrées sur le petit arc ds, générateur de cette base. Alors le problème est de même espèce que celui que nous avons résolu pour les berceaux dans les n°s 4, 5 et 6; et sans prendre la peine de refaire les calculs, il suffit, dans les équations (9) et (11), de substituer $\frac{2myP}{n}$ pour P, et $\frac{2myQ}{n}$ pour Q, ou simplement yP pour P et yQ pour Q, parce que le coefficient constant $\frac{2m}{n}$ disparaît de lui-même. On aura ainsi les équations suivantes qui seront pour les voûtes de révolution, ce que les équations (9) et (11) sont pour les berceaux,

$$d\left(\frac{PRydy}{ds}\right)+d\left(\frac{QRydy^2}{ds^2}\right)+Pydx=0\ldots\ldots.(30).$$

$$d\,(PRy)+d\left(\frac{QRydy}{ds}\right)-Qydx=0\ldots\ldots.(31).$$

On choisit dans les applications celle des deux équations qui se prête le mieux à l'intégration. Par leur moyen on peut, comme nous l'avons fait pour les berceaux, résoudre ce double problème : étant donnée la loi des forces ou la courbe génératrice de l'extrados, trouver celle de l'intrados : étant donnée la courbe génératrice d'intrados, trouver la loi des forces ou construire la courbe d'extrados. Ce second problème est toujours possible, mais le premier exige trois intégrations.

41. *Équation de la loi des forces ou des poids des voussoirs.* Je me bornerai au cas où les voussoirs ont une densité constante et ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur.

On a ici P = 0, et l'équation (30) que je choisis parce qu'elle ne renferme Q que dans un seul terme, donne, étant intégrée,

$$Q=\frac{cds^2}{yRdy^2}=\frac{cd\left(\frac{dx}{dy}\right)}{yds}\ldots\ldots\ldots(32)$$

$\left(\text{en mettant pour R sa valeur } \frac{ds^3}{dy^2d\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right)$. C'est par cette équation

qu'on connaîtra le poids relatif Q qui sollicite chaque point de la surface courbe d'intrados, en y mettant pour $\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{yds}$ sa valeur donnée par la courbe de l'intrados : ainsi, par exemple, si l'intrados est une demi-ellipse dont a soit la montée et b la demi-base, on trouvera $Q = \frac{cab^2}{y(b^2-y^2)\sqrt{b^4-b^2y^2+a^2y^2}}$, équation qui fera connaître la force Q qui sollicite chaque point du cercle ou parallèle horizontal dont le rayon est y lorsqu'on aura déterminé c, ce qui mérite quelques observations.

M. Bossut (n° 34, pag. 426) dit que c doit être déterminé, par la condition qu'à la clef, la valeur de Q soit donnée : on ne saurait procéder ainsi ; car à la clef on a $y=0$, d'où $Q=\frac{cab^2}{0}=\infty$, et par conséquent $c=0$.

Il suit de là que le pôle ou sommet de la voûte ne peut servir à déterminer c. On trouverait de même que le point des naissances ne peut pas servir non plus, du moins quand la tangente à la courbe dans ce point est verticale : mais si l'on veut que la force Q soit q, quand $y=\mathfrak{C}$, on voit que c aura une valeur finie, et qu'on pourra trouver les valeurs relatives de Q pour tous les autres points de l'intrados générateur.

Il est cependant des cas où le pôle peut servir à déterminer c, c'est lorsque le rayon de courbure est infini dans ce point. Ainsi, lorsque la courbe d'intrados donne $R=\frac{1}{0}$ à la clef, l'équation (32) donne $c=\frac{0}{0}Q$, expression indéterminée qui pourra donner pour c une valeur finie, et par conséquent faire connaître les valeurs de Q pour chaque point.

42. *Poids du dôme qui est cubable. Rapport des poids des assises.* Il résulte du numéro précédent, que $2\pi Qy$ ou $\frac{2mc}{ds}\,d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ est le poids qui sollicite le cercle parallèle horizontal dont y est le rayon : cette quantité est donc toujours donnée par l'équation de l'intrados générateur ; elle est pour l'intrados elliptique $\frac{2mcab^2}{(b^2-y^2)\sqrt{b^4-b^2y^2+a^2y^2}}$, quantité qui demeure finie à la clef où $y=0$.

L'expression de tout le poids du dôme est $2m\int Qyds$ ou $2mc\int d\left(\frac{dx}{dy}\right)$; c'est-à-dire $\frac{2mcdx}{dy}$, intégrale qui n'exige pas de nouvelle constante, puisqu'elle s'évanouit d'elle-même à la clef où $\frac{dx}{dy}=0$. Ainsi le poids du dôme est toujours assignable : son volume est donc aussi cubable, propriété analogue à celle des berceaux équilibrés que nous avons vu être quarrables. En appelant S' le volume renfermé entre les surfaces d'intrados et d'extrados, on aura

$$S'=\frac{2mcdx}{dy}\ldots\ldots\ldots(33).$$

Quant à la capacité renfermée sous la surface d'intrados, son expression est comme pour tous les solides de révolution $m\int y^2dx$.

On sait de même que l'expression de l'aire de la surface d'intrados est $2m\int yds$.

43. *Grandeur des joints, leur rapport aux forces. Dômes terminés en flèche infinie.* Soit (fig. 34) $SP=x$, $PM=y$, $SM=s$, $MN=K$, $MI=R$; G le centre de gravité du voussoir infiniment petit $MNnm$; GG' sa distance à l'axe, on aura

$$\text{aire } MNnm=\frac{Kds}{2R}(2R+K),\ Gg=\tfrac{1}{3}K\frac{3R+2K}{2R+K};$$

et l'on trouvera

$$GG'=y+\tfrac{1}{3}K\frac{3R+2K}{2R+K}\cdot\frac{dx}{ds}.$$

Si d'après le principe de la méthode centrobarique, on multiplie l'aire $MNnm$ par la distance GG' de son centre de gravité à l'axe de rotation, et le produit par $2m$, on aura le volume ou poids d'une assise entière de voussoir. Mais, d'après l'équation (32) et suivantes, ce poids est aussi exprimé par $2mQyds$ ou par $\frac{2mcds^3}{Rdy^2}$. Egalant successivement chacune des deux dernières expressions de ce poids avec la première, on aura, après avoir supprimé les facteurs communs, les deux équations suivantes :

$$\frac{cds^2}{dy^2}=\tfrac{1}{2}Ky(2R+K)+\tfrac{1}{6}K^2(3R+2K)\frac{dx}{ds}\ldots(34);$$

$$RQy=\tfrac{1}{2}Ky(2R+K)+\tfrac{1}{6}K^2(3R+2K)\frac{dx}{ds}\ldots(35).$$

La

La première de ces deux équations sert à trouver la grandeur K du joint de lit quelconque correspondant à y, en résolvant une équation du troisième degré, après y avoir mis pour ds, dx, dy et R, leurs valeurs données par l'équation d'intrados : elle fournit donc le moyen de construire par points l'extrados générateur.

La seconde donne la relation entre K et Q; mais auparavant il faut déterminer la constante c.

En raisonnant ici comme nous avons fait plus haut, on verra qu'on peut toujours déterminer c par la condition que K devienne K′ quand y devient 6. Mais si on veut déterminer c par la connaissance de K à la clef, il faut distinguer deux cas. 1°. Si le rayon de courbure a une grandeur finie à la clef, l'équation (34) donne $c = 0$, ce qui ne fait rien connaître. 2°. Si R est infini au pôle, on a $c = \frac{0}{0}$, quantité qui peut être finie.

Supposons qu'on ait déterminé c pour le point où $y = 6$, ce qui est toujours possible, l'équation (34) donnera pour K une grandeur infinie à la clef dans le premier cas, et dans le second, une grandeur qui pourra être finie; c'est-à-dire que si le rayon de courbure de l'intrados a une grandeur finie à la clef, l'extrados s'étendra à l'infini au-dessus du pôle, en se rapprochant de l'axe comme d'une asymptote : alors le dôme sera surmonté et terminé par une espèce de flèche ou de pyramide s'étendant à l'infini, comme on le voit (fig. 35), dans laquelle l'intrados est une parabole.

Au reste, quoique la flèche s'étende à l'infini, son poids est néanmoins d'une grandeur finie : c'est ce que fait voir l'équation (33). Il arrive ici, comme pour certaines suites, que la somme d'un nombre infini de termes décroissans, a néanmoins une grandeur finie : cette remarque permet de remplacer une portion de la flèche infinie par une sphère d'un poids équivalent : ce moyen est à la fois simple et conforme au goût de l'Architecture.

Cette particularité des flèches qui aura lieu le plus souvent, puisqu'il est rare que l'intrados ait le rayon de courbure infini à la clef, est une singularité très-remarquable. J'ignore si elle a été connue de Mascheroni dont je n'ai pu encore me procurer l'ouvrage devenu très-rare. M. Bossut qui a écrit le dernier sur cette matière, n'en a point parlé, et cependant la chose méritait assez d'être remarquée.

J'ajouterai encore que l'extrados générateur peut aussi, comme dans les berceaux, avoir pour asymptote la ligne des naissances (*voyez* fig. 36).

L'intrados est un demi-cercle, et par conséquent la surface d'intrados une demi-sphère : on voit que l'extrados a deux asymptotes, la montée et la ligne des naissances : il a deux points d'inflexion de chaque côté de la montée. On sent que les voussoirs des naissances ne pouvant avoir une grandeur infinie comme l'exigerait la théorie, doivent être retenus sur les impostes, soit par le frottement, soit par tout autre moyen (*voyez* pour l'équation de l'extrados, le n° 58).

44. *Du joint qui est un* minimum. La figure 36 fait voir qu'il existe un joint plus court que tous les autres; c'est le point où l'épaisseur de la voûte est un *minimum*. Il peut être utile de connaître sa position : pour cela il suffit de différentier l'équation (34) en faisant varier y et K, et d'égaler à zéro la valeur de $\frac{dK}{dy}$. Les facteurs feront connaître les *maxima* et *minima* de K.

Si, par exemple (fig. 36), l'intrados est un demi-cercle dont le rayon est a, et l'équation $y^2 = 2ax - x^2$, l'équation (34) devient

$$\frac{a^2c}{a^2y - y^3} = \tfrac{1}{2}\text{K}\,(2a + \text{K}) + \frac{\text{K}^2}{6a}(3a + 2\text{K}).$$

Différentiant et égalant à zéro la valeur de $\frac{dK}{dy}$, on trouve $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$ pour la valeur de y, correspondante au *minimum* de K. Substituant cette valeur de y dans l'équation ci-dessus, et pour K l'épaisseur qu'on se propose de donner à la voûte dans le point M de la plus petite épaisseur, l'équation fera connaître c : enfin la même équation donnera toutes les valeurs de K correspondantes à celles de y, et l'on construira la courbe d'extrados telle qu'on la voit dans la figure.

SECTION II.

Applications.

45. *Trouver la courbe de l'intrados dans le cas où la voûte doit être infiniment peu épaisse, et soumise à la seule action de la pesanteur.* Je vais chercher la courbe génératrice de l'intrados, quand la voûte ne doit être qu'une surface courbe très-mince, et que les voussoirs ne doivent être sollicités que par l'action de la pesanteur: on a alors $P=0$ et $Q=1$, parce que la pesanteur étant une force constante qui agit uniformément sur tous les points de la voûte, peut être représentée par 1 : faisant ces substitutions dans l'équation (30) du n° 40, que je préfère parce que Q n'entre que dans un de ses termes, elle devient, en intégrant, $\frac{Rydy^2}{ds^2}=c$; substituant pour R sa valeur $\frac{ds^3}{dyd^2x}$, dans laquelle dy est constant, on a

$$ydy=\frac{cd^2x}{ds}=\frac{cd^2x}{\sqrt{dx^2+dy^2}}:$$

je fais $dx=pdy$, d'où $d^2x=dpdy$, et il vient

$$ydy=\frac{cdp}{\sqrt{1+p^2}};$$

dont l'intégrale est

$$\frac{y^2}{2c}=\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right),$$

à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter, parce qu'elle donne $0=0$ quand on y fait $y=0$ et $p=\frac{dx}{dy}=0$, comme cela doit être à la clef. Si on multiplie le premier membre de l'équation $\frac{y^2}{2c}$; par $\log e$ (e étant le nombre dont le logarithme est 1), on aura

$$e^{\frac{y^2}{2c}}=p+\sqrt{1+p^2}.$$

Résolvant cette équation, et faisant pour simplifier $\frac{1}{2c}=c'$, ce qui est permis, puisque c est une constante indéterminée, on aura

$$p=-\tfrac{1}{2}e^{-c'y^2}+\tfrac{1}{2}e^{c'y^2},$$

et remettant pour p sa valeur,

$$2dx=dy.e^{c'y^2}-dy.e^{-c'y^2}.$$

Telle est l'équation differentielle de la courbe cherchée; on ne peut l'intégrer que par série. On a d'abord

$$e^{c'y^2}=1+c'y^2+\frac{c'^2y^4}{1.2}+\frac{c'^3y^6}{1.2.3}+\text{etc.}$$

pour avoir $e^{-c'y^2}$ ou $\frac{1}{e^{c'y^2}}$, je divise l'unité par la série trouvée, et j'ai

$$e^{-c'y^2}=1-\frac{c'y^2}{1}+\frac{c'^2y^4}{1.2}-\frac{c'^3y^6}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Faisant les substitutions et intégrant, on a

$$x=\frac{c'y^3}{3.1}+\frac{c'^3y^7}{7.1.2.3}+\frac{c'^5y^{11}}{11.1.2.3.4.5}+\frac{c'^7y^{15}}{15.1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.....}(a);$$

équation qui n'exige pas de nouvelle constante, parce qu'elle donne d'elle-même $x=0$ quand $y=0$, comme cela doit être à la clef. Il ne reste qu'à déterminer c' par la condition qu'on ait $x=a=$ montée quand $y=b=$ rayon de la base, ce qui ne peut se faire que par le tâtonnement ou par la méthode du retour des suites. L'application de cette méthode m'a donné la valeur suivante

$$c'=\frac{3a}{b^3}-\frac{27.a^3}{14b^5}+\frac{27^2.a^5}{14^2b^7}-\frac{27^3.a^7}{14^3b^9}+\text{etc.....}(b).$$

Cette série n'est convergente qu'autant que a est plus petit que b: néanmoins nous verrons comment elle sert à trouver c' dans tous les cas.

46. *Discussion de la courbe. Rectification.* On trouve aisément $ds=\frac{1}{2}dy\,(e^{c'y^2}+e^{-c'y^2})$, quantité qui étant intégrée d'une manière

analogue à celle qui a servi à trouver x, donne

$$s = y + \frac{'c^2y^5}{5.1.2} + \frac{'c^4y^9}{9.1.2.3.4} + \frac{'c^6y^{13}}{13.1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Aire de la voûte. En faisant $m = 3,1416$, l'expression d'une zône horizontale élémentaire de la voûte que je fais $= ds'$, est

$$ds' = 2myds = mydy\,(e^{c'y^2} + e^{-c'y^2}) :$$

intégrant on a

$$s' = \frac{m}{2c'}\,(e^{c'y^2} - e^{-c'y^2}).$$

En appelant z, la sounormale, on a aussi

$$s' = \frac{my}{c'z}.$$

Ainsi l'aire de la voûte est quarrable, quoique la courbe génératrice ne soit pas rectifiable.

On trouve aussi que l'aire plane renfermée par cette même courbe est quarrable, et qu'elle est

$$\int ydx = -\frac{1}{2c'} + \frac{1}{4c'e^{c'y^2}} + \frac{e^{c'y^2}}{4c'}.$$

Capacité sous le dôme. L'expression du solide de révolution engendré par la courbe est

$$m\int y^2dx = \tfrac{1}{2}\,m\int y^2dy\,(e^{c'y^2} - e^{-c'y^2}),$$

dont on trouve, en procédant comme ci-dessus, que l'intégrale est

$$m\left(\frac{c'y^5}{5.1} + \frac{'c^3y^9}{9.1.2.3} + \frac{'c^5y^{13}}{13.1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right).$$

Rayon de courbure et développée. On trouve que l'expression du rayon de courbure est

$$R = \frac{(e^{c'y^2} + e^{-c'y^2})^2}{8c'y},$$

d'où l'on voit qu'il est infini à la clef où $y = 0$. Depuis la clef, il va en diminuant de part et d'autre jusqu'aux points M et M' (fig. 37) où

il est le plus petit possible : depuis ces points il recommence à croître et continue jusqu'à l'infini. La developpée de la courbe est composée de deux paires de branches et a deux points de rebroussement correspondans aux points M et M'. Pour avoir la valeur de y correspondante au point M où R est un *minimum*, il faut faire $dR = 0$, et l'on trouve $e^{2c'y^2} = \frac{4c'y^2+1}{4c'y^2-1}$. Pour le cas de $c' = 0{,}0004$, on a $36{,}126 = y$.

Épaisseur du dôme. En raisonnant ici comme nous avons fait à l'occasion de la chaînette, on se convaincra que l'épaisseur k du dôme doit être partout la même. Si on voulait une autre démonstration, on n'aurait qu'à se proposer de trouver quel est l'intrados générateur pour lequel l'extrados exigé par l'équilibre, est partout parallèle. Il faudrait pour cela intégrer l'équation (34) en supposant K constant. La courbe que l'on trouverait serait la courbe intérieure de la fig. 37 menée à la distance $\frac{1}{2}$ K, parallèlement à celle que nous avons trouvée et discutée dans cet article.

Je suis entré dans quelques détails sur la courbe dont il s'agit, parce qu'elle est la plus propre à faire un dôme solide et peu pesant : l'épaisseur de la voûte, quoique considérable, doit toujours être uniforme, tandis que si l'on adopte une autre courbe pour l'intrados, l'équilibre exige que l'épaisseur soit variable. La courbe dont il s'agit est pour les dômes, ce que la chaînette est pour les berceaux ; toutes deux servent à construire l'épure de la voûte, en leur menant en dedans et en dehors deux courbes parallèles qui forment l'intrados et l'extrados. On pourrait par analogie appeler chaînette croissante, la courbe relative au dôme ; car on pourrait faire une chaîne dont les anneaux allassent en croissant de part et d'autre du point le plus bas, et qui étant suspendue, prendrait la courbure du dôme renversé. Je donnerai dans le chapitre suivant, la poussée de ce dôme. Remarquons que c'est une erreur dangereuse des praticiens peu instruits, d'employer pour les dômes la chaînette ordinaire qui est si différente de la chaînette croissante.

J'ai calculé une Table qu'on voit ci-après, au moyen de laquelle on peut déterminer tout ce qui est nécessaire pour l'épure du dôme : elle fait connaître $SP = x$, $PM = y$, $SM = s$, la surface courbe

du dôme $= s'$, la sounormale PR $= z = \frac{ydy}{dx} = \frac{2y}{e^{c'y^2} - e^{-c'y^2}}$. La Table est calculée pour le cas de $c' = 0,0004$: on cherchera dans la Table les valeurs de x et y qui ont le même rapport que a et b (*voyez* nos 13, 14, 32) : on multipliera tous les nombres de la Table par $\frac{b}{y}$ ou $\frac{a}{x}$, et l'on aura le c' qui convient au dôme proposé, en multipliant le c' de la Table 0,0004 par $\frac{y^2}{b^2}$ ou $\frac{x^2}{a^2}$.

Quand on aura construit la courbe, on lui mènera en dedans et en dehors deux courbes parallèles chacune à la distance $\frac{1}{2}k$: ces deux courbes formeront l'intrados et l'extrados générateurs du dôme dont l'épaisseur uniforme sera k : il est aisé de se convaincre que les voussoirs seront mutuellement en équilibre. En effet, si l'on imagine la courbe intermédiaire divisée en petits arcs égaux à ds, les voussoirs ou plutôt leur section dans le plan vertical de la courbe, seront aussi égaux : la force qui agit sur chaque point de la courbe d'intrados sera donc aussi constante, et l'on aura toujours Q constant, comme nous l'avons supposé dans la recherche de la courbe.

Table des rapports entre l'arc SM = s, l'abscisse SP = x, l'ordonnée PM = y, la sous-normale PR = z, et la surface engendrée = s' dans la chaînette croissante, dans laquelle c' = 0,0004.

s	y	x	z	s'	s	y	x	z	s'
1	1,00	0,00	2500,00	3,14	46	43,46	11,40	52,41	6512,9
2	2,00	0,00	1250,00	12,57	47	42,22	12,04	51,17	6787,2
3	3,00	0,00	833,33	28,27	48	44,97	12,70	49,96	7069,5
4	4,00	0,01	625,00	50,27	49	45,71	13,38	48,81	7355,2
5	5,00	0,02	500,00	78,54	50	46,43	14,07	47,71	7643,3
6	6,00	0,03	416,66	113,10	51	47,14	14,77	46,65	7936,5
7	7,00	0,05	357,12	153,94	52	47,84	15,50	45,62	8236,0
8	8,00	0,07	312,47	201,08	53	48,52	16,22	44,63	8538,4
9	9.00	0,09	277,73	254,51	54	49,19	16,96	43,67	8846,8
10	10,00	0,13	249,93	314,25	55	49,85	17,73	42,75	9158,4
11	11,00	0,17	227,18	380,28	56	50,50	18,49	41,86	9475,0
12	12,00	0,23	208,22	452,64	57	51,13	19,26	41,00	9794,7
13	12,99	0,29	192,30	530,54	58	51,74	20,03	40,17	10116
14	13,99	0,37	178,52	615,49	59	52,35	20,83	39,38	10441
15	14,99	0,45	166,56	706,83	60	52,95	21,64	38,60	10774
16	15,98	0,55	156,17	803,66	61	53,53	22,45	37,86	11105
17	16,98	0,66	146,95	907,52	62	54,10	23,27	37,14	11440
18	17,97	0,78	138,73	1017,3	63	54,66	24,10	36,45	11777
19	18,96	0,92	131,41	1133,2	64	55,21	24,93	35,76	12126
20	19,95	1,07	124,78	1255,7	65	55,75	25,78	35,09	12478
21	20,94	1,23	118,78	1384,6	66	56,27	26,63	34,44	12832
22	21,92	1,41	113,35	1518,8	67	56,79	27,48	33,82	13188
23	22,90	1,60	108,37	1659,6	68	57,29	28,34	33,22	13545
24	23,87	1,82	103,80	1806,1	69	57,79	29,20	32,64	13906
25	24,85	2,05	99,58	1960,0	70	58,27	30,07	32,07	14271
26	25,82	2,31	95,67	2119,7	71	58,76	30,95	31,52	14641
27	26,78	2,58	92,05	2285,0	72	59,23	31,84	30,99	15011
28	27,74	2,87	88,71	2456,0	73	59,69	32,73	30,47	15386
29	28,69	3,18	85,58	2533,0	74	60,14	33,63	29,97	15760
30	29,63	3,50	82,66	2815,2	75	60,58	34,53	29,48	16140
31	30,57	3,85	79,92	3004,2	76	61,01	35,43	29,00	16523
32	31,50	4,21	77,33	3199,3	77	61,44	36,33	28,54	16908
33	32,42	4,60	74,89	3400,0	78	61,86	37,24	28,09	17296
34	33,33	5,01	72,59	3606,2	79	62,27	38,15	27,66	17682
35	34,24	5,44	70,41	3819,3	80	62,67	39,06	27,23	18076
36	35,13	5,88	68,35	4036,7	81	63,05	39,97	26,82	18466
37	36,01	6,35	66,40	4259,3	82	63,44	40,89	26,41	18866
38	36,89	6,84	64,54	4489,2	83	63,83	41,82	26,02	19266
39	37,75	7,34	62,78	4722,7	84	64,20	42,75	25,64	19666
40	38,61	7,87	61,09	4963,9	85	64,57	43,68	25,26	20077
41	39,44	8,41	59,47	5208,7	86	64,93	44,62	24,90	20480
42	40,27	8,98	57,93	5459,8	87	65,29	45,56	24,55	20888
43	41,09	9,55	56,45	5717,0	88	65,64	46,50	24,21	21295
44	41,89	10,15	55,04	5977,5	89	65,98	47,44	23,87	21710
45	42,68	10,76	53,70	6242,3	90	66,32	48,38	23,54	22127

Suite de la Table.

s	y	x	z	s′	s	y	x	z	s′
91	66,65	49,32	23,21	22553	136	77,52	92,94	14,13	43088
92	66,98	50,26	22,90	22972	137	77,70	93,92	14,01	43558
93	67,30	51,21	22,59	23398	138	77,88	94,90	13,88	44069
94	67,61	52,16	22,30	23812	139	78,05	95,89	13,76	44549
95	67,92	53,11	22,01	24237	140	78,22	96,88	13,64	45040
96	68,23	54,06	21,73	24661	141	78,39	97,86	13,52	45538
97	68,53	55,01	21,45	25092	142	78,56	98,84	13,41	46011
98	68,83	55,96	21,17	25536	143	78,73	99,83	13,29	46528
99	69,12	59,92	20,91	25962	144	78,89	100,82	13,18	47010
100	69,41	57,88	20,65	26400	145	79,05	101,81	13,07	47502
101	69,69	58,84	20,40	26831	146	79,21	102,79	12,96	48002
102	69,97	59,80	20,15	27872	147	79,37	103,78	12,85	48512
103	70,24	60,76	19,91	27708	148	79,53	104,77	12,75	48990
104	70,51	61,72	19,67	28154	149	79,69	105,76	12,64	49516
105	70,78	62,69	19,44	28595	150	79,85	106,75	12,54	50010
106	71,04	63,66	19,21	29044	151	80,01	107,73	12,44	50514
107	71,30	64,62	18,99	29489	152	80,16	108,72	12,35	50978
108	71,56	65,59	18,77	29943	153	80,31	109,71	12,25	51490
109	71,81	66,56	18,56	30387	154	80,46	110,70	12,15	52010
110	72,06	67,53	18,35	30842	155	80,61	111,69	12,06	52496
111	72,31	68,50	18,15	31290	156	80,76	112,68	11,97	52991
112	72,55	69,47	17,95	31745	157	80,91	113,67	11,88	53490
113	72,79	70,44	17,75	32208	158	81,05	114,66	11,79	53993
114	73,02	71,41	17,56	32659	159	81,19	115,65	11,70	54500
115	73,25	72,39	17,37	33121	160	81,33	116,64	11,61	55019
116	73,48	73,36	17,19	33572	161	81,47	117,63	11,52	55544
117	73,70	74,33	17,01	34030	162	81,61	118,62	11,44	56027
118	73,92	75,30	16,83	34496	163	81,75	119,61	11,35	56569
119	74,14	76,28	16,65	34972	164	81,89	120,60	11,26	57119
120	74,36	77,26	16,48	35438	165	82,02	121,59	11,18	57620
121	74,57	78,23	16,32	35887	166	82,16	122,58	11,10	58134
122	74,78	79,20	16,15	36368	167	82,29	123,57	11,02	58649
123	74,99	80,18	15,99	36833	168	82,42	124,56	10,94	59170
124	75,20	81,16	15,83	37310	169	82,55	125,55	10,86	59701
125	75,41	82,14	15,68	37772	170	82,68	126,54	10,78	60239
126	75,61	83,12	15,53	38238	171	82,81	127,53	10,71	60727
127	75,81	84,10	15,38	38713	172	82,94	128,52	10,63	61280
128	76,01	85,08	15,23	39197	173	83,07	129,51	10,56	61783
129	76,21	86,06	15,08	39692	174	83,19	130,50	10,48	62344
130	76,40	87,04	14,94	40164	175	83,31	131,50	10,41	62855
131	76,59	88,02	14,80	40645	176	83,44	132,49	10,34	63379
132	76,78	89,00	14,66	41135	177	83,56	133,48	10,27	63903
133	76,97	89,98	14,53	41605	178	83,68	134,47	10,20	64433
134	77,16	90,97	14,39	42113	179	83,80	135,47	10,13	64971
135	77,34	91,96	14,26	42596	180	83,93	136,47	10,06	65526

Suite de la Table.

s	y	x	z	s′	s	y	x	z	s′
181	84,05	137,46	10,00	66013	206	86,73	162,32	8,58	79390
182	84,[illegible]	138,45	9,93	66573	207	86,83	163,31	8,53	79949
183	84,29	139,44	9,87	67073	208	86,93	164,31	8,49	80418
184	84,40	140,43	9,80	67640	209	87,03	165,31	8,44	80989
185	84,51	141,43	9,74	68146	210	87,12	166,30	8,39	81555
186	84,63	142,42	9,68	68664	211	87,22	167,29	8,34	82138
187	84,74	143,41	9,62	69182	212	87,32	168,28	8,30	82626
188	84,85	144,40	9,56	69707	213	87,41	169,27	8,25	83214
189	84,96	145,40	9,50	70240	214	87,50	170,27	8,21	83705
190	85,07	146,40	9,44	70778	215	87,59	171,27	8,16	84304
191	85,18	147,39	9,38	71323	216	87,69	172,26	8,12	84816
192	85,29	148,38	9,32	71873	217	87,78	173,25	8,08	85326
193	85,40	149,37	9,27	72355	218	87,87	174,24	8,03	85942
194	85,51	150,37	9,21	72920	219	87,96	175,24	7,99	86462
195	85,61	151,37	9,15	73483	220	88,05	176,24	7,95	86986
196	85,72	152,36	9,10	73983	221	88,14	177,23	7,91	87514
197	85,83	153,35	9,04	74570	222	88,23	178,22	7,87	88052
198	85,93	154,35	8,99	75070	223	88,32	179,22	7,82	88704
199	86,03	155,35	8,93	75664	224	88,41	180,22	7,78	89250
200	86,13	156,35	8,88	76178	225	88,49	181,22	7,74	89792
201	86,23	157,34	8,83	76699	226	88,58	182,21	7,70	90352
202	86,33	158,33	8,78	77225	227	88,67	183,20	7,66	90916
203	86,43	159,33	8,73	77757	228	88,76	184,20	7,62	91487
204	86,53	160,33	8,68	78296	229	88,84	185,20	7,58	92052
205	86,63	161,33	8,63	78840	230	88,92	186,20	7,54	92624

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LES DÔMES A BASE CIRCULAIRE ET LES TAMBOURS QUI LES SUPPORTENT.

SECTION PREMIÈRE.

Équation d'équilibre entre le Dôme et le Tambour.

47. *Des Dômes équilibrés.* TOUT ce que nous avons dit dans le chapitre II, sur la poussée des berceaux, est applicable aux dômes; les principes sont les mêmes; il n'y a de différence que dans la figure des corps qui se font équilibre.

Dans les berceaux, si l'on imagine des plans verticaux perpendiculaires à l'axe du berceau, et parallèles entre eux, on a des tranches verticales d'épaisseur constante; c'est pourquoi l'on peut se contenter de considérer l'une quelconque de ces sections. Dans le dôme, au contraire, les plans verticaux qui passent par la montée, partagent la voûte en secteurs ou onglets, et le tambour, qui est un cylindre creux, en prismes, qui ont pour base le petit espace mixtiligne ABB'A' (fig. 33) : chacun de ces prismes supporte un secteur de dôme, et doit résister à la poussée de ce secteur. Le dôme et le tambour seront en équilibre, si un secteur quelconque et le prisme correspondant se font équilibre. On pourra même imaginer une section verticale qui passe par le milieu du secteur et du prisme, et supposer que tout leur poids est concentré dans cette section : par ce moyen, on peut calculer dans cette section les actions réciproques du secteur et du prisme, comme s'il s'agis-

sait d'un berceau, avec cette différence que dans les berceaux les tranches verticales sont proportionnelles aux aires, au lieu que dans les dômes, les poids du secteur et du prisme correspondans ne peuvent pas être représentés par l'aire de leur [illegible] verticale, mais seulement par leurs vol[illegible] respectifs.

Cel[illegible] pourra, pour trouver l'équation d'équilibre de rotation, employer, comme pour les berceaux, deux hypothèses, celle du coin avec ou sans frottement, et celle des arcs-boutans. Dans la première, il faudra considérer deux portions de secteur opposées, comme formant un coin, le reste du secteur étant supposé adhérent au tambour. On cherchera quel est le coin qui donne le *maximum* de la poussée F; regardant ensuite F comme constant, il faudra trouver le *maximum* de Z, par l'équation d'équilibre. Dans la seconde hypothèse on suivra la même marche, mais le frottement n'entrera pour rien dans la recherche de la plus grande poussée.

Dans cet article je ne m'occuperai que des dômes équilibrés, parce que le calcul est plus simple et plus rigoureux: je ferai usage de l'hypothèse du coin sans frottement.

Nous avons vu dans le n° 42, équation (33), que le volume d'un secteur, n étant leur nombre, était $\frac{2mcdx}{ndy}$. Divisant cette expression par tang α, ou par $\frac{dx}{dy}$, on a, pour la poussée F d'une portion quelconque de secteur, $F=\frac{2mc}{n}$; c'est-à-dire que cette poussée est constante et la même, quelle que soit la grandeur du coin, propriété remarquable et commune aux berceaux et aux dômes.

Cherchons maintenant le volume d'un prisme qui supporte le secteur.

Soit (fig. 33) le plan de la base du tambour, $OA=b$, $AB=Z$, $H=$ hauteur du tambour, $f=$ sa densité, on trouvera que le poids du tambour est $fmHZ(Z+2b)$; celui du prisme ayant pour base le petit espace ABB'A', sera $\frac{m}{n}fZH(Z+2b)$. La distance BG du centre de gravité du petit trapèze ABB'A', est $BC=\frac{1}{3}Z\frac{3b+Z}{2b+Z}$: ainsi la figure 9 étant la section verticale du dôme et du tambour,

le moment du prisme élémentaire ci-dessus autour du point c de rotation, sera $\frac{mfHZ^2}{3n}(3b+Z)$.

D'après cela, et conservant toujours la notation convenue, on verra facilement que les équations d'équilibre de rotation et du non-glissement du tambour, sont, en observant que le facteur $\frac{m}{n}$ disparaît,

$$\left.\begin{array}{l} 2c(H+h') = 2c(Z-D')\tang\alpha + \frac{1}{3}fHZ^2(3b+Z) \\ 2c < \pi(2c\tang\alpha + fHZ(2b+Z)) \end{array}\right\}\ldots(36).$$

Il faut se rappeler que dans ces équations on a (fig. 9)
$D'=AR'=A\mathcal{C}\sin\alpha$, $h'=\mathcal{C}R'=A\mathcal{C}\cos\alpha$, $Aa=K$, $A\mathcal{C}=\frac{1}{3}K\frac{3R+2K}{2R+K}$. Ces valeurs sont rigoureuses, mais dans la pratique on peut faire $A\mathcal{C}=\frac{1}{2}K$.

Il faut se rappeler encore que c et K doivent être déterminés comme nous l'avons vu n° 41.

On peut, pour la facilité des architectes non géomètres, traduire ainsi les formules (36).

Il y aura équilibre de rotation, si le poids du dôme, multiplié par la hauteur du tambour et par $\cot\alpha$ (α étant l'angle du joint des naissances avec la verticale), est égal au poids du dôme multiplié par l'épaisseur du tambour, diminuée du demi-joint des naissances, plus au poids du tambour multiplié par sa demi-épaisseur.

Il n'y aura pas glissement des pieds-droits sur leur base, si le poids du dôme multiplié par $\cot\alpha$, est plus petit que la fraction qui exprime le frottement, multipliée par la somme des poids du dôme et des pieds-droits.

Tout ce qui précède suppose que le cylindre creux ou tambour, est divisé en parties égales ou prismes par les plans verticaux qui partagent le dôme en secteurs : on sent bien que si le tambour était composé de pierres entrelacées et liées ensemble, soit par des barres de fer, soit par des saillies en forme de chevilles, soit par tout autre moyen, il n'y aurait plus lieu à aucun renversement. Si les assises du dôme étaient assemblées de la même manière, il n'existerait plus de poussée : il est étonnant que ce genre de construction ne soit pas généralement usité.

Pression. Quand on néglige le frottement, l'expression de la pression est $\frac{M}{\sin \alpha}$. On peut entendre par M le poids soit d'une portion de secteur, soit de la calotte entière du dôme, parce que la surface qui éprouve cette pression, augmente en même rapport que le nombre des secteurs. La pression peut encore être exprimée par $\frac{2mcds}{dy}$: on voit par là qu'elle augmente continuellement depuis la clef où elle est $2mc$, c'est-à-dire égale à la poussée horizontale.

48. *Formules pour toutes espèces de Dômes dans les différentes hypothèses.*

J'ai déjà dit que la théorie de la poussée des dômes était la même que celle des berceaux. Ainsi, en conservant toujours la notation du n° 26, et observant qu'ici M, N, S, au lieu d'être des aires, sont des volumes d'onglets, ou même des volumes de calotte, parce que la calotte est au tambour comme un secteur est au prisme vertical qui le supporte; on verra que dans toutes les hypothèses, les équations d'équilibre de rotation et du non-glissement du tambour, sont les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} H + hF + Mq + ND &= bS + SZ + \tfrac{m}{3} fHZ^2 (3b + Z) \\ F &< \pi [S + mfnZ (2b + Z)] \end{aligned}\right\} \ldots (37).$$

Ces équations sont les analogues des équations (22) trouvées pour les berceaux : tout se réduit à y substituer, pour avoir Z, les valeurs de F et α qui conviennent à l'hypothèse qu'on veut employer. Je vais les parcourir.

1°. Dans l'hypothèse du coin sans frottement, correspondante à celle de la Hyre, on suppose que le joint de rupture est à l'intersection de l'intrados par la diagonale du rectangle construit sur la montée et le rayon de la base; ainsi on a $F = M \cot \alpha$, $N = S - M$. Les autres quantités qui entrent dans les équations (37) se déduisent toutes des précédentes et de la figure de la voûte : il ne me reste plus que des substitutions à faire pour avoir Z.

2°. Si on considère la voûte entière comme un seul cône ou coin sans frottement, il faudra faire $N = 0$, $M = S$, $q = b + D'$,

$D = q$, $h = h'$. Cette hypothèse ne sera pas praticable lorsque la tangente de l'intrados est verticale aux naissances.

3°. Si on considère deux secteurs entiers et opposés, comme butant l'un contre l'autre à l'extrados de la clef, et s'appuyant contre le tambour, au point A, par l'arête de l'intrados; il faudra faire dans les formules (37), $h = 0$, $N = 0$, $M = S$, $q = b$, $F = S\frac{b - D}{a + k}$: alors D sera la distance de la montée à la verticale passant par le centre d'inertie du secteur entier. Cette hypothèse approchera plus de la vérité dans les dômes surbaissés que dans ceux qui sont surhaussés: dans ces derniers elle pourra être absurde, et donner $F = 0$ ou F négatif, quand $D > b$; ce qui arrivera, si l'épaisseur de la voûte est considérable et augmente depuis la clef.

4°. Si on regarde chaque secteur comme étant d'une seule pièce, et qu'on prenne pour valeur de F, la force horizontale qu'il faudrait employer au milieu de la clef, pour soutenir le secteur en équilibre autour du point $\mathfrak{C}$, milieu du joint des naissances, il faudra faire dans les formules, $F = S\frac{b - D + D'}{a + \frac{1}{2}k - h'}$ $N = 0$, $M = S$, $q = b + D'$, $h = h'$; D sera la distance de la montée au centre d'inertie du secteur entier. Cette hypothèse ne s'écartera jamais de la vérité, si l'extrados n'est pas très-aplati.

5°. Dans l'hypothèse plus rigoureuse du coin avec frottement, on aura (*voy.* n° 26) $F = M \cot(\theta + \alpha)$; il faudra chercher la valeur de α, qui rend F un *maximum*, en faisant $dF = 0$. Regardant ensuite F comme constant, et considérant le secteur comme composé de deux portions dont l'une est adhérente au tambour, il faudra chercher le point où il faut appliquer F pour rendre Z un *maximum;* c'est-à-dire qu'il faudra chercher la valeur de α, qui rend $hF + Mq + MD$ un *maximum;* ce qui peut se trouver soit par le tâtonnement, soit directement par l'équation $Fdh + d(Mq) + d(ND) = 0$. Ayant trouvé α, on substituera sa valeur, ainsi que celle de F précédemment trouvée, dans l'équation (37) qui fera connaître Z, puisqu'elle est censée ne renfermer que F, H, b, α et Z.

6°. Dans l'hypothèse des deux arcs-boutans indéterminés, on aura $F = \frac{Ml}{a + k - h}$ (*voy.* n° 27). On cherchera d'abord le *maximum*

de F, en faisant $dF = 0$; puis le *maximum* de Z, comme dans l'hypothèse précédente. On choisira ensuite le plus grand des deux *maximums* de Z fournis par les deux dernières hypothèses.

7°. On peut encore adopter une autre hypothèse qui participe des précédentes. Après avoir trouvé le *maximum* de F dans l'hypothèse du coin avec ou sans frottement, on peut, au lieu de chercher encore le *maximum* de Z, substituer tout de suite la valeur trouvée pour α et F dans l'équation (37) : cela revient à supposer que le coin de plus grande poussée est aussi celui qui a le plus grand moment relatif pour renverser le pied-droit; quoique cela ne soit pas vrai, il en résulte une valeur assez approchée pour Z.

Pression. Quant à la pression qui a lieu entre deux voussoirs quelconques d'un secteur, elle est la même que celle qu'exerce la calotte entière sur la zône conique qui la supporte. Tout ce que nous avons dit dans le n° 26, s'applique ici : il suffit de regarder M comme le volume de la calotte, et F comme le *maximum* de poussée exercé par le dôme dans tout son pourtour.

La distinction que nous avons faite entre les berceaux de la première espèce et ceux de la seconde, n'a pas pas lieu pour les dômes engendrés par l'intrados et l'extrados qui auraient formé un berceau de l'une ou l'autre espèce. Je vais prouver que la poussée qui, abstraction faite du frottement, a pour expression $M \cot \alpha$, est toujours nulle à la clef, à moins que le rayon de courbure n'y soit infini : en effet, l'expression du voussoir élémentaire de la clef, qui a la forme d'un petit cône tronqué dont le rayon de la petite base est $ds = \frac{mkds^2}{3r^2}(3r^2 + 3rk + k^2)$, expression dans laquelle r est le rayon de courbure à la clef; c'est la valeur de M à la clef. On a aussi en ce point

$$\tang \alpha = d\alpha = d\left(\frac{dx}{dy}\right) \text{ et } r = \frac{ds}{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}, \text{ d'où } \frac{M}{\tang \alpha} = \frac{mkds}{3r}(3r^2 + 3rk + k^2),$$

quantité qui renfermant encore ds, fait voir que $\frac{M}{\tang \alpha}$ ou la poussée exercée par le petit voussoir de la clef d'un dôme, est infiniment petite, à moins que r ne soit infini, auquel cas elle devient $\frac{0}{0}$, et peut être finie : cela n'empêche pas que la pression ne soit

soit toujours égale à la poussée horizontale qui a lieu aux naissances, laquelle est alors l'effet non de la clef, mais de la réaction des voussoirs inférieurs.

49. *Volume et centre d'inertie d'un onglet.*

L'application des formules du n° précédent exige la détermination préalable de M, N, D, *l*. Il est impossible de donner des formules qui dispensent de toute intégration, puisque les quantités ci-dessus dépendent de la figure de la voûte; mais on peut du moins tracer la marche du calcul; c'est ce que je vais faire. M. Bossut, pour plus de commodité, substitue à l'onglet N, un prisme ayant même base et même hauteur. Outre que ce prisme est plus grand que l'onglet, leurs centres d'inertie sont placés bien différemment à l'égard de la montée : l'erreur qui résulte de cette fausse supposition est trop considérable pour être négligée, même dans la pratique (*voyez* Dynamique citée n° 24, page 416).

Il s'agit de trouver le volume M engendré par l'aire SSTE (fig. 38), et celui N produit par la révolution de l'aire EF*a*A; quoique la chose soit toujours possible, cependant pour simplifier un peu les calculs, j'imagine par le milieu R de EF, l'horizontale *pq*Q, et je substitue aux aires SSTE, EF*a*A, les aires SS'*pq*, *qpa*A, qui sont très-sensiblement égales aux deux premières. Si l'on imagine deux sections horizontales infiniment proches, l'expression du volume de la tranche élémentaire du dôme, distraction faite de la partie vide, en conservant la notation convenue, sera $my'^2dx' - my^2dx$. Donc $m\int y'^2dx' - m\int y^2dx$ sera le volume de la calotte M, en prenant l'intégrale depuis la clef jusqu'à l'horizontale Q*p* qui est donnée de position : la même intégrale, prise jusqu'à la ligne des naissances, sera la valeur de S. La différence des deux intégrales donnera N. Il faut trouver ensuite la position du centre I de gravité du secteur infiniment petit, dont SS'*pq* est la section verticale moyenne, et du centre G de gravité de l'onglet correspondant à l'aire *qpa*A : imaginons deux sections horizontales infiniment proches; chaque ordonnée, telle que *p*Q, décrit un petit secteur de cercle *p*Q*p'* (fig. 38*). Soit *n*, le nombre infiniment grand des secteurs *p*Q*p'*, compris dans le cercle entier dont *p*Q est le rayon; on aura, pour le volume du petit prisme dont *pqq'p'* est la base et *dx* l'épaisseur, l'expression

$\frac{my'^2dx' - my^2dx}{n}$: la somme de ces petits prismes qui composent l'onglet SS'pq, sera $\frac{m}{n}\int y'^2dx - \frac{m}{n}\int y^2dx$, en prenant l'intégrale jusqu'à l'ordonnée pQ.

Le moment du petit prisme, ayant pour base le secteur circulaire pQp' à l'égard de la montée passant par Q, est $\frac{m}{n}y'^2dx'.\frac{2}{3}y'$, ou $\frac{2m}{3n}y'^3dx'$; le moment du secteur vide qQq' est $\frac{2m}{3n}y^3dx$: donc le moment de la petite tranche $pqq'p'$, est $\frac{2m}{3n}y'^3dx' - \frac{2m}{3n}y^3dx$, et leur somme $\frac{2m}{3n}\int y'^3dx' - \frac{2m}{3n}\int y^3dx$. Divisant cette somme des momens par la somme des volumes de ces mêmes prismes trouvée plus haut, on aura $\frac{\frac{2}{3}\int y'^3dx' - \frac{2}{3}\int y^3dx}{\int y'^2dx' - \int y^2dx}$; *cette* quantité sera la distance QL, si l'intégrale est prise jusques à la ligne Qp : ce sera au contraire la valeur de OL' (distance de la montée au centre de gravité du secteur total), si l'intégrale est prise jusqu'à la ligne OA.

On verra aussi qu'on aura OL', en divisant la somme des momens des petits prismes compris dans l'onglet qpaA, par le volume de cet onglet : on a

$$qpa\text{A} = \text{SS}'a\text{A} - \text{SS}'pq = \text{OS}'a - \text{OSA} - \text{OS}'p + \text{QS}q.$$

Les secteurs dont ces aires sont les sections, fournissent une équation analogue. Maintenant, pour éviter la multitude des mots, désignons par le signe $\int'$ une intégrale prise jusqu'à la ligne OA, et par $\int$ l'intégrale prise jusqu'à la ligne Qp seulement, on verra, avec un peu d'attention, qu'on a les expressions suivantes :

dôme ayant pour demi-coupe verticale

$$SS'aA = S = m\int' y'^2 dx' - m\int' y^2 dx,$$

calotte ayant pour demi-coupe $SS'pq$, ou

$$M = m\int y'^2 dx' - m\int y^2 dx;$$

volume engendré par $qpaA$, ou

$$N = m\left(\int' y'^2 dx' - \int' y^2 dx - \int y'^2 dx' + \int y'^2 dx\right); \quad \ldots (38)$$

$$OL'' = \frac{\frac{2}{3}\int' y'^3 dx' - \frac{2}{3}\int' y^3 dx}{\int' y'^2 dx' - \int' y^2 dx},$$

$$QL = \frac{\frac{2}{3}\int y'^3 dx' - \frac{2}{3}\int y^3 dx}{\int y'^2 dx' - \int y^2 dx},$$

$$OL' = \frac{\frac{2}{3}\int' y'^3 dx' - \frac{2}{3}\int' y^3 dx - \frac{2}{3}\int y'^3 dx' + \frac{2}{3}\int y^3 dx}{\int' y'^2 dx' - \int' y^2 dx - \int y'^2 dx' + \int y^2 dx}.$$

SECTION II.

Applications.

50. *Dôme d'épaisseur uniforme.* Il s'agit dans cet article du n° 45, dont nous avons vu que l'intrados générateur était, pour les dômes, ce que la chaînette est pour les berceaux; tout se réduit donc à appliquer convenablement les formules (36) du n° 47. La première chose à faire, est de chercher la valeur de C et tang α, qui entrent dans l'équation (36). Or, en retournant aux n°s 45 et 47, on reconnaîtra que la quantité c de l'équation (36) est la même chose que la quantité $\frac{1}{2c'}$ du n° 45 : on aura donc c, en déterminant c', comme nous l'avons vu n° 45, par la condition qu'on ait $x = aO$ (fig. 37), ou $x = a + \frac{1}{2}k = a'$, quand $y = OR' = b + D' = b'$. On verra de même que tang $\alpha = \frac{dx}{dy}$ vaut ici $\frac{1}{2}e^{c'y^2} - \frac{1}{2}e^{-c'y^2}$: on a ainsi tout ce qui entre dans les formules (36), et il sera aisé d'en conclure Z.

51. *Dômes en cul-de-four.* On appelle cul-de-four, un dôme engendré par la révolution d'une demi-ellipse autour de son demi-axe vertical, ou plutôt par la révolution de deux courbes menées

parallèlement en dehors et en dedans de l'ellipse. Le cul-de-four est dit surhaussé ou surbaissé, suivant que la montée est plus grande ou plus petite que le rayon de la base : on voit que ces dômes sont de l'espèce de ceux que j'ai appelés non-équilibrés, et qui ne subsistent que par la liaison du ciment.

Je ferai usage dans cet article, des formules du n° 48, en suivant ce qui a été dit dans le 4°. de ce n°. En appelant s la surface engendrée par la révolution de l'ellipse $\alpha\mathcal{C}$ (fig. 24), le volume du dôme sera très-sensiblement ks; ainsi on aura $S = ks$. Faisant de plus, pour abréger, $b + \frac{1}{2}k = b'$, $a + \frac{1}{2}k = a'$, et faisant attention que $D' = \frac{1}{2}k$, les formules (37) deviennent

$$ksH\,\frac{b'-D}{a'} = ks\left(Z - \tfrac{1}{2}k\right) + \frac{m}{3}fHZ^2\,(3b + Z).$$

$$ks\,\frac{b'-D}{a'} < \pi\left[ks + fHZ\,(2b + Z)\right].$$

Il ne reste plus, pour pouvoir faire usage de ces formules, qu'à déterminer s et D. comme ce calcul est assez long, j'ai calculé deux tables qui en dispensent.

La première fait connaître $D = OG'$, relativement aux différentes grandeurs de la montée $O\alpha = a'$, dans la supposition du demi-arc horizontal $O\mathcal{C} = b' = 1$. La seconde fait connaître la valeur correspondante de s.

En faisant attention que les surfaces semblables sont entre elles comme les quarrés des dimensions homologues, on aura la valeur de s qui convient au dôme proposé, en multipliant le signe S de la table par b^2. On verra aussi que pour avoir le D de la formule, il faut multiplier le D de la table par b'.

Supposons, pour faire une application, $OA = b = 20$, $OS = a = 14$, $SS' = k = 2$, d'où $a' = 15$, $b' = 21$; il faut chercher dans la table le point où la montée est les $\frac{15}{21}$ ou les 0,7143èmes du rayon de la base, pour avoir les valeurs correspondantes de D et s, en prenant des parties proportionnelles : on trouvera $s = 5{,}1282$, $D = 0{,}7621$. Multipliant cette valeur de D par b' ou 21, et celle de s par b'^2 ou $\overline{21}^2$, on aura pour celles qu'il faut substituer dans les formules ci-dessus, $D = 16{,}00$, $s = 2261{,}4$. Le reste du calcul n'a plus rien d'embarrassant.

Observons que pour avoir les valeurs plus exactes de D et s, il faudrait employer la méthode d'interpolation, en prenant les différences premières et secondes des termes des tables, voisins de ceux entre lesquels on veut intercaler.

TABLE *de la distance de la montée à la verticale passant par le centre de gravité d'un secteur d'ellipsoïde.*

Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.	Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.	Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.	Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.
0,1	0,6746	0,8	0,7702	1,5	0,8091	2,2	0,8253
0,2	0,6902	0,9	0,7784	1,6	0,8123	2,3	0,8268
0,3	0,7070	1,0	0,7854	1,7	0,8151	2,4	0,8281
0,4	0,7229	1,1	0,7915	1,8	0,8176	2,5	0,8293
0,5	0,7372	1,2	0,7968	1,9	0,8198		
0,6	0,7498	1,3	0,8015	2,0	0,8218		
0,7	0,7608	1,4	0,8055	2,1	0,8237		

Si l'on voulait avoir la capacité recouverte par le dôme, on remarquerait qu'elle est les deux tiers du cylindre dont le diamètre est $2b$ et la hauteur a : elle est donc $\frac{2}{3}\,mab^2$.

TABLE *des surfaces des différentes ellipsoïdes.*

Oα ou montée.	S ou aire du dôme.	Oα ou montée.	S ou aire du dôme.	Oα ou montée.	S ou aire du dôme.	Oα ou montée.	S ou aire du dôme.
0,1	3,2361	0,8	5,4644	1,5	8,4592	2,2	11,6690
0,2	3,4356	0,9	5,8687	1,6	8,9088	2,3	12,1364
0,3	3,6970	1,0	6,2832	1,7	9,3623	2,4	12,6053
0,4	4,0009	1,1	6,7062	1,8	9,8186	2,5	13,0762
0,5	4,3359	1,2	7,1360	1,9	10,2774		
0,6	4,6948	1,3	7,5722	2,0	10,7393		
0,7	5,0721	1,4	8,0134	2,1	11,2032		

Observons encore que pour avoir Z dans la formule ci-dessus, il ne sera pas nécessaire de résoudre une équation du troisième degré; on négligera Z dans le facteur $(3b+Z)$, et l'on aura une première approximation, en résolvant l'équation du second degré : on mettra la valeur numérique trouvée pour Z dans le même facteur seulement, et l'on résoudra de nouveau l'équation du second degré, ce qui donnera une seconde valeur de Z plus approchée; on pourrait continuer ainsi :

52. *Dôme hémisphérique.* Le dôme hémisphérique n'étant qu'un cas particulier des dômes en cul-de-four, il suffit de faire $d'=b'$ dans les calculs du n° précédent, et $D=0{,}7854\,b'$. Remarquons encore qu'ici on a S, d'une manière directe et plus rigoureuse qu'en multipliant la surface moyenne par l'épaisseur : en effet, il sera aisé de voir qu'on a le volume du dôme, en retranchant la demi-sphère vide de la demi-sphère totale, ce qui donne

$$S=\tfrac{2}{3}m(b+k)^3-\tfrac{2}{3}mb^3=\tfrac{2}{3}m(3b^2+3bk+k^2)k.$$

Faisant ces substitutions dans les formules du n° précédent, on a les

suivantes pour le dôme hémisphérique,

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}4495kH(3b^2+3bk+k^2)=2{,}0944k(3b^2+3bk+k^2)(Z-\tfrac{1}{2}k)+\frac{m}{3}fHZ^2(3b+Z) \\ 0{,}4495k(3b^2+3bk+k^2)<\pi[2{,}0944k(3b^2+3bk+k^2)+mfHZ(2b+Z)] \end{array}\right\}(a).$$

Je vais chercher actuellement l'équation d'équilibre de rotation dans l'hypothèse du coin sans frottement, c'est-à-dire, en concevant qu'une calotte dont l'angle générateur est α, repose sur la surface conique du reste du dôme, et fait effort pour l'écarter.

La figure 39 représente une section verticale du dôme et du tambour ; $\alpha\mathfrak{C}$ est le profil d'une sphère intermédiaire passant par les centres de gravité de tous les voussoirs. Ces voussoirs sont de petites pyramides tronquées inégales, mais qu'on peut supposer égales, quand il s'agit de trouver leurs centres communs de gravité. La valeur de $O\alpha$ sera sensiblement $O\alpha = b + \frac{1}{2}k = b'$: si on veut l'avoir rigoureusement, il faut chercher le centre de gravité d'une pyramide tronquée infiniment petite, dont la hauteur est k, et l'on trouvera

$$O\alpha = r = \frac{3}{4}\,\frac{B^4 - b^4}{B^3 - b^3} = \frac{3}{4}\,\frac{B^3 + B^2b + Bb^2 + b^3}{B^2 + Bb + b^2}.$$

La première chose à faire est de chercher la distance $OG' = D$ de la montée au centre G d'inertie de l'onglet qui a pour profil EFaA ; ce centre sera le même que celui de la portion de sphère intermédiaire dont nous avons parlé. Soit (fig. 39 *) $\alpha\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ le triangle sphérique déterminé dans la sphère intermédiaire par les deux plans verticaux qui comprennent l'onglet, il s'agira de trouver le centre G de gravité de la portion RR$'\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ de ce triangle sphérique.

Je fais pour simplifier $Oa = b + k = B$: soit aussi $\mathfrak{C}M = s$. Cela posé, on aura (fig. 39)

secteur sphérique, ou volume engendré par SOE $= \frac{2}{3}mb^3(1 - \cos\alpha)$;
secteur sphérique, ou volume engendré par S$'$OF $= \frac{2}{3}mB^3(1 - \cos\alpha)$;
calotte ou volume engendré par SS$'$FE $= \frac{2}{3}m(1 - \cos\alpha)(B^3 - b^3) = M$;
hémisphère vide, ou volume engendré par OSA ...... $= \frac{2}{3}mb^3$;
hémisphère total, ou volume engendré par OS$'a$ ...... $= \frac{2}{3}mB^3$;
dôme entier $= \frac{2}{3}m(B^3 - b^3)$:
volume engendré par EFaA $= \frac{2}{3}m(B^3 - b^3)\cos\alpha = N$;

Zône engendrée par l'arc $Mn = 2my ds$. Donc n étant le nombre infiniment grand des secteurs, on aura aire $Mmm'M' = \frac{2myds}{n}$; son moment à l'égard de l'axe $= \frac{2my^2ds}{n}$; somme de ces momens $= \frac{2m}{n}\int y^2 ds$; quantité qui, étant intégrée depuis $\mathfrak{C}$ jusqu'à R, est

$$\frac{mr^2}{n}(\sin\alpha\cos\alpha . r + s), \quad \text{ou} \quad \frac{mr^3}{n}\left[\sin\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{2}m\left(1 - \frac{\alpha}{90^\circ}\right)\right],$$

$\left(\text{en observant que } s = \frac{\frac{1}{2}mr(90^\circ - \alpha)}{90^\circ}\right)$.

Si on divise cette somme des momens par la surface $RR'\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, qu'on verra être $\frac{2mr.\overline{OQ'}}{n}$ ou $\frac{2mr^2\cos\alpha}{n}$, on trouvera pour la distance cherchée à l'axe du centre d'inertie de l'aire courbe $RR'\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$, ou de l'onglet engendré par EFaA, l'expression

$$OG' = D = \tfrac{1}{2}r\left(\sin\alpha + \tfrac{1}{2}m\frac{1 - \frac{\alpha}{90^\circ}}{\cos\alpha}\right).$$

On verra aussi qu'on a $RR' = r\cos\alpha$, $OR' = r\sin\alpha$.

De toutes ces données, on conclut aisément la formule suivante pour l'équilibre de rotation

$$M(H + r\cos\alpha)\cot\alpha = M(b + Z - \sin\alpha) + N(b + Z - D) + \tfrac{1}{3}mfHZ^2(3b + Z)\ldots(b).$$

Si l'on fait $\alpha = 45^\circ$, on aura

$$D = 0{,}9089r, \quad \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071;$$

c'est l'hypothèse en usage; mais ma formule dispense de chercher le centre de gravité de l'onglet, ce qui est assez pénible.

Si l'on veut, conformément à ce qui a été dit dans le 7°. du n° 48, prendre pour la poussée grand F, celle du coin qui exerce la plus grande, on aura, dans l'hypothèse du coin sans frottement, $F = M\cot\alpha$. En jetant les yeux sur l'expression rapportée ci-dessus, on verra que la quantité qui doit être un *maximum*, est ici $\cot\alpha(1 - \cos\alpha)$, ou $\cot\alpha - \frac{\overline{\cos\alpha}^2}{\sin\alpha}$. Différentiant et divisant par

par $d\alpha$, on a, réduction faite, $\overline{\cos\alpha}^3 - 2\cos\alpha + 1 = 0$, équation dont les trois racines sont $\cos\alpha = 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. La première, ainsi que celles données par $d\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 0$, indiquent un *minimum :* celle qui donne le *maximum* cherché, est $\cos\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = 0{,}618$, d'où $\alpha = 51° \, 50'$: c'est là l'angle qui donne le coin de plus grande poussée.

Cette valeur de α, étant substituée dans l'équation (b), donnera une valeur de Z plus approchée, mais qui ne sera pas son vrai *maximum*, puisqu'il faudrait encore chercher le point d'application le plus favorable pour la poussée F, regardée comme constante.

La formule (2) peut être traduite de la manière suivante pour les praticiens.

Il y aura équilibre de rotation, si le poids du dôme, multiplié par la hauteur du tambour et par le nombre 0,2146, est égal au poids du dôme multiplié par l'épaisseur du tambour diminuée de la demi-épaisseur du dôme, plus au poids du tambour multiplié par sa demi-épaisseur.

Il n'y aura pas glissement du tambour, si le produit du poids du dôme par le nombre 0,2146, est plus petit que le frottement multiplié par la somme des poids du dôme et du tambour.

53. *Dôme du Panthéon français.* Ce dôme (fig. 38) est engendré par la révolution de deux paraboles, dont l'une forme la surface d'intrados, et l'autre celle d'extrados. En faisant $OS' = A$, $OS = a$, $Od' = B$, $AO = b$, la parabole d'extrados aura pour équation $'y^2 = \frac{B^2 x'}{A}$, et celle d'intrados, $y^2 = \frac{b^2}{a} x$; d'où l'on tire (conformément au n° 29)

$$'y^2 dx' = \frac{2A\,'y^3 dy'}{B^2}, \quad 'y^3 dx' = \frac{2A\,'y^4 dy'}{B^2}, \quad y^2 dx = \frac{2ay^3 dy}{b^2};$$
$$y^3 dx = \frac{2ay^4 dy}{b^2}.$$

J'intègre ces équations, et ayant $Qp = B'$, $Qq = b'$; je mets dans les intégrales successivement B et B' pour y', ainsi que b et b' pour y. Par là, j'ai les deux espèces d'intégrales $\int'$, $\int$ des formules

38 du n° 49, qui deviennent

$$S = \tfrac{1}{2} mAB^2 - \tfrac{1}{2} mab^2,$$
$$M = \tfrac{1}{2}\frac{mA'B^4}{2B^2} - \frac{ma'b^4}{2b^2},$$
$$N = m\left(\tfrac{1}{2}AB^2 - \tfrac{1}{2}ab^2 - \frac{A'B^4}{2B^2} + \frac{a'b^4}{2b^2}\right);$$
$$OL'' = \frac{8(AB^3 - ab^3)}{15(AB^2 - ab^2)},$$
$$QL = \frac{8\left(\frac{A'B^5}{B^2} - \frac{a'b^5}{b^2}\right)}{15\left(\frac{A'B^4}{B^2} - \frac{a'b^4}{b^2}\right)},$$
$$OL' = \frac{8\left(AB^3 - ab^3 - \frac{A'B^5}{B^2} + \frac{a'b^5}{b^2}\right)}{15\left(AB^2 - ab^3 - \frac{A'B^4}{B^2} + \frac{a'b^4}{b^2}\right)}.$$

Les dimensions du dôme sont $b = 32$ pieds, $B = 35$, $a = b\sqrt{3}$, $= 55{,}425$, $A = 56{,}925$, $AD = H = 44$.

Pour avoir, d'après la règle usitée, la position E du joint de rupture EF, on imagine un rectangle dont OA et OS sont deux côtés; la diagonale menée par le point O, détermine le point E sur l'intrados : on trouve ici que $EP = 19{,}84$. Le joint EF étant perpendiculaire à l'intrados, la position de la ligne pQ est déterminée, et l'on trouve $pQ = B' = 21{,}51$, et $qQ = b' = 19{,}22$, $SP = 22{,}81$, $OQ = 34{,}253 = k$, $AR'' = q = 11{,}224$.

On a de plus $\cot\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{2ay}$; d'où, pour le joint EF, $\cot\alpha = 0{,}4806$, et pour le joint Aa, $\cot\alpha = 0{,}2887$.

Si, conformément au 1°. du n° 48, on adopte l'hypothèse usitée du coin déterminée par la diagonale menée du point O, on trouvera $Z = 1{,}3$.

Si, conformément au 2°. du n° 48, on considère le dôme entier comme un seul coin, on trouve $Z = 5{,}9$.

Si, conformément au 3°. du n° 48, on considère deux secteurs entiers buttant à l'extrados de la clef et à l'intrados des naissances, on trouve $Z = 2{,}96$.

Si on prend pour arcs-boutans à la clef la portion de secteur

SSFE, en regardant le reste du secteur comme adhérent au tambour, on trouve une quantité négative pour Z, ce qui signifie que l'arc-boutant ne saurait renverser le reste du secteur à cause de son adhérence, si petite que soit l'épaisseur Z. Cette hypothèse devient absurde dans le dôme proposé.

Si, conformément au 4°. du même n°, on considère le secteur entier comme un arc-boutant pouvant tourner autour du point ϵ, milieu du joint des naissances, on trouve $Z = 4{,}04$, résultat plus probable.

M. Bossut a trouvé, dans la première hypothèse, 3,25 au lieu de 1,3 : voici les causes de cette différence. Premièrement, nous avons vu qu'il a substitué au secteur EF*a*A, un autre secteur très-différent en volume et par la position de son centre d'inertie : secondement, il s'est trompé d'un tiers dans le volume de la calotte ; car il retranche le paraboloïde vide d'un paraboloïde extérieur, qui ne repose pas sur la même section horizontale : troisièmement, il a fait entrer dans le calcul, la lanterne ou cylindre creux qui entoure la partie supérieure du dôme, ainsi que l'attique ou espèce de tour annulaire qui repose sur le tambour. Je n'ai pas tenu compte de cette lanterne et de cet attique, parce qu'il aurait fallu connaître leurs dimensions et leur position : au reste il est toujours aisé d'y avoir égard. L'un de ces corps s'ajoute à la calotte, et l'autre au tambour ; ce sont deux forces dont les momens se calculent comme nous l'avons fait pour le dôme et pour le tambour.

Observons, en finissant cet article, que si l'architecte du Panthéon eût été géomètre, au lieu de faire décroître l'épaisseur du dôme depuis les naissances, il eût fait le contraire ; car nous avons vu dans le chapitre précédent, que lorsque l'intrados est parabolique, l'épaisseur doit augmenter depuis les naissances, et le dôme se terminer en flèche.

SECTION III.

Du Tambour d'égale résistance et du minimum *des matériaux.*

54. *Tambour d'égale résistance.*

Le problème dont il s'agit ici est l'analogue de celui du n° 38.

On demande la figure qu'il faut donner au tambour pour qu'il résiste également dans tous ses points au renversement, en supposant qu'il puisse se rompre par assises horizontales, et que la partie vide du tambour soit cylindrique.

Imaginons par le pôle du dôme une infinité de plans verticaux : ces plans partageront le dôme en un nombre n infiniment grand de secteurs ; ils partageront aussi le tambour en un nombre d'onglets qui étaient des prismes, quand le tambour était un cylindre creux.

Soit (fig. 32) une de ces sections verticales qui, par sa révolution autour de la montée, engendre le dôme et le tambour. En imaginant une section horizontale, elle sera représentée par la figure 33, et le petit trapèze ABB'A' sera la section de *l'onglet* du tambour compris entre les deux plans verticaux élevés sur OB et OB'.

Soit toujours F la poussée horizontale que le dôme entier exerce dans son pourtour, $\frac{F}{n}$ sera la poussée appliquée en E contre l'onglet du tambour ; $\frac{S}{n}$ sera le poids du secteur du dôme qui presse en E l'onglet : deux autres forces concourent avec la dernière pour s'opposer au renversement autour du point N, de la portion d'onglet engendrée par l'aire AENQ : ces deux forces sont les poids de cette même partie d'onglet, et la force d'adhérence g, qui unit cette partie supérieure de l'onglet à la partie qui est en-dessous de la section horizontale NQ. Il faut, pour l'équilibre du système, que le moment de la poussée, à l'égard du point extérieur N d'une section horizontale quelconque, soit égal à la somme des trois forces verticales dont nous venons de parler.

En conservant la notation du n° 38, on trouvera, comme nous l'avons déjà dit au n° 47, aire ABB'A' $= \frac{m}{n} z(2b + z)$.

En imaginant une autre section horizontale passant à la distance dn de la première, le poids d'une tranche élémentaire d'onglet ayant pour base ABB'A', sera $\frac{m}{n} fz(2b + z)\, du$.

La distance AG (fig. 33) du point A au centre d'inertie de cette tranche, qui est un petit trapèze, sera $AG = \frac{1}{3} z \frac{3b + 2z}{2b + z}$.

La somme des momens de toutes ces tranches, à l'égard de l'axe AD (fig. 32), sera $\int ABB'A'.\overline{AG}$, c'est-à-dire $\frac{m}{3n}\int\int(3bz^2+2z^3)du$.

Divisant cette somme des momens par la somme $\frac{m}{n}\int\int du\,(2bz+z^2)$ des tranches ou volume de l'onglet engendré par AENQ, on aura pour la distance du centre de gravité C de cette portion d'onglet à la ligne AD, $QG'=\frac{\int du(3bz^2+2z^3)}{3\int du(2bz+z^2)}$, $NG'=z-QG'$.

Le moment de la portion d'onglet engendrée par AENQ, à l'égard du point N de rotation, sera

$$\frac{mf}{n}\int du(2bz+z^2)\left(z-\frac{\int du(3bz^2+2z^3)}{3\int du(2bz+z^2)}\right), \text{ ou}\ldots\ldots$$
$$\frac{mfz}{n}\int du(2bz+z^2)-\frac{mf}{3n}\int du(3bz^2+2z^3).$$

g étant la force d'adhérence qui a lieu pour une aire $=1$, la somme de ces forces, distribuées sur la section ABB'A' de rupture, est $g.ABB'A'$, c'est-à-dire $\frac{mg}{n}(2bz+z^2)$. La résultante de ces forces agit à la distance BG (fig. 33) $=\frac{1}{3}z\,\frac{3b+z}{2b+z}$: leur moment, à l'égard du point N, est donc $\frac{mg}{n}(3bz^2+z^3)$.

Égalant le moment de la poussée du secteur du dôme, lequel est $\frac{uF}{n}$, à la somme des momens des trois forces verticales trouvées ci-dessus, on a l'équation d'équilibre suivante, dans laquelle n ne se trouve plus :

$$uF=S(z-D)+\tfrac{1}{3}mg(3bz^2+z^3)+mfz\int du(2bz+z^2)-\tfrac{1}{3}mf\int du(3bz^2+2z^3)\ldots(a).$$

Je différencie deux fois de suite cette équation pour la débarrasser du signe $\int$, en regardant dz comme constant ; j'ai, toute réduction faite,

$$[mf(bz^2+\tfrac{1}{3}z^3)-F]\,d^2u+2mf(2bz+z^2)\,dzdu+2mg(b+z)\,dz^2=0\ldots.(b).$$

Pour intégrer cette équation, il faut faire $du=pdz$, et il vient $dp+Zpdz+Z'dz=0$, dans laquelle Z, Z' sont des fonctions de z, et qu'on pourra intégrer par les méthodes connues. On déterminera les deux constantes comme dans le n° 38.

Nous avons supposé que chaque onglet du tambour était d'une seule pièce, ensorte que l'adhérence d'une molécule à l'autre est la même dans toute la hauteur. Mais presque toujours chaque onglet est composé de plusieurs assises, ou lits de pierres posées les unes sur les autres; alors l'adhérence est presque nulle d'un lit à l'autre : ainsi on aura une solution plus conforme à la réalité, en faisant g très-petit, ou même nul dans les calculs précédens.

La solution que M. Bossut a donnée de ce problème est erronée; il s'est trompé dans la détermination de la distance du centre de gravité de l'onglet à l'égard de la ligne AD : il faut supposer $2y^3$ dans son expression au lieu de y^3.

55. *Minimum des matériaux.*

Les dômes sont encore susceptibles d'un perfectionnement analogue à celui que nous avons déterminé n° 39, pour les berceaux. On peut se proposer cette question : Connaissant la hauteur du tambour, le rayon du vide, la nature de l'intrados et celle de l'extrados, trouver quelles doivent être la montée du dôme et l'épaispaisseur du tambour, pour que le tout étant en équilibre, la totalité des matériaux du dôme et du tambour soit un *minimum*.

On voit qu'ici la quantité qui doit être un *minimum* est........ $S + mfHZ(2b + Z)$, dans laquelle il ne faudra faire varier que la montée a et l'épaisseur Z du tambour, après y avoir mis, pour S, sa valeur en fonction de a, b et k, donnée par la figure du dôme. L'équation $ds + 2mfHdZ(b + Z) = 0$, devra être combinée avec celle d'équilibre de rotation, pour en tirer les valeurs cherchées de a et Z.

CHAPITRE V.

DES VOUTES IRRÉGULIÈRES, OU DONT LES JOINTS NE SONT PAS NORMAUX A L'INTRADOS.

SECTION PREMIÈRE.

Des Voûtes dont les joints concourent en un même point.

56. LIGNES *de courbure des surfaces courbes. Conditions que doivent remplir les joints.*

Je rapporte ici quelques réflexions de M. Monge, sur la théorie des surfaces courbes, parfaitement applicables à la théorie des voûtes : elles sont extraites d'un excellent Mémoire inséré dans le deuxième cahier du Journal de l'École polytechnique.

« Après avoir conçu, par un point quelconque d'une surface
» courbe, une normale à cette surface, si l'on veut passer au point
» infiniment voisin par lequel la nouvelle normale soit dans le
» même plan que la première, et la rencontre par conséquent en
» un point, on peut toujours le faire dans deux directions : ces
» deux directions sont toujours à angle droit sur la surface, et
» elles sont les seules qui donnent ce résultat, si l'on en excepte
» le cas particulier de la sphère pour toute la surface, et quelques
» points remarquables pour d'autres, tels que les sommets des sur-
» faces de révolution.

» Les deux points dans lesquels chaque normale est rencontrée
» par les deux normales infiniment voisines, sont les centres des

» deux courbures de la surface dans le point que l'on considère ;
» les distances de ces deux points à celui de la surface, sont les
» rayons des deux courbures ; et les directions rectangulaires dans
» lesquelles on passe de la normale aux deux normales consécu-
» tives qui la coupent, sont les directions de ces courbures.

» Si l'on conçoit que le point de la surface se meuve de manière
» qu'à chaque instant des directions des deux courbures, il suive
» celle qui est dans un premier sens, et qu'il continue ainsi de
» se mouvoir autant que le permettra l'étendue de la surface,
» la courbe qu'il parcourra sera celle de l'une des courbures.
» En concevant par chaque point une courbe parcourue de cette
» manière, on aura la suite des lignes de la première courbure, qui
» diviseront l'aire de la surface courbe en zônes, suivant une pre-
» mière direction. Si l'on conçoit que le point de la surface, au lieu
» de suivre dans son mouvement la direction de la première cour-
» bure, suive au contraire celle de la seconde, il parcourra une
» courbe de la seconde courbure, et cette courbe coupera toutes
» celles de la première à angles droits. En concevant pour chaque
» point une courbe parcourue de cette seconde manière, on aura
» la suite des lignes de la seconde courbure, qui diviseront l'aire
» de la surface en d'autres zônes, suivant une nouvelle direction.
» Enfin, chacune des lignes de l'une de ces deux suites étant per-
» pendiculaire à toutes celles de l'autre suite, et réciproquement,
» il s'ensuit que ces deux suites de ligne de courbure diviseront
» l'aire de la surface courbe en élémens qui seront tous rectan-
» gulaires : cela peut être rendu sensible sur les surfaces de ré-
» volution prises pour exemple.

» Sur les surfaces de révolution, on ne peut passer d'un point
» à un autre pour lequel les deux normales sont dans un même
» plan, à moins qu'on ne suive ou la direction du méridien, ou
» celle du parallèle qui passe par ce point : suivant toute autre
» direction, les deux normales ne se rencontreraient pas, puisque,
» étant des méridiens différens, elles ne passeraient pas par le même
» point de l'axe. Les méridiens sont donc la suite des lignes d'une
» des courbes, et les parallèles la suite de celles de l'autre ; chaque
» courbe de l'une de ces suites est perpendiculaire à toutes celles
» de

» de l'autre; et les deux suites divisent l'aire de la surface en élé-
» mens que l'on peut regarder comme rectangulaires.

» Si la normale se meut de manière que, sans cesser d'être perpendiculaire à la surface, elle parcoure une ligne de courbure dans chaque instant de son mouvement, elle se portera sur une des deux normales infiniment voisines qui la coupent, et elle engendrera une surface qui sera développable, qui sera partout dans une de ses lignes de courbure.

» Si pour le même point, la normale parcourt la ligne de l'autre courbure, elle engendrera de même une autre surface développable normale à la surface courbe, et qui rencontrera la première en ligne droite et à angles droits. Si l'on conçoit donc une semblable surface pour chacune des lignes de courbure de l'une et de l'autre suites, on aura deux suites de surfaces développables normales à la surface courbe, et telles que chacune de celles d'une des suites rencontrera toutes celles de l'autre suite en lignes droites et à angles droits. Toutes ces surfaces développables normales diviseront l'espace en élémens, indéfinis dans le sens de la longueur de la normale, infiniment étroits dans le sens des deux courbures, et terminés par quatre plans rectangulaires entre eux, et par quatre arêtes indéfinies et en lignes droites.

» Chacune des surfaces développables normales d'une des suites a une arête de rebroussement particulière, et qui, étant le lieu des intersections successives des normales consécutives pour une même ligne de courbure, est le lieu des centres d'une des courbures pour tous les points de cette ligne. Si l'on considère donc le système des arêtes de rebroussement de toutes les surfaces développables normales d'une même suite, ce système formera une surface courbe qui sera le lieu de tous les centres d'une des courbures de la surface courbe. Les deux surfaces des centres de courbure d'une même surface courbe sont, par rapport à elles, ce que les développées ordinaires sont par rapport aux courbes; dans quelques cas particuliers, elles sont distinctes l'une de l'autre, et peuvent avoir leurs équations séparées : en général elles sont les nappes différentes d'une même surface courbe, et elles sont toutes deux exprimées par une même équation d'un degré pair.

» Les résultats que nous venons d'exposer succinctement, sont » susceptibles de plusieurs applications utiles aux arts; une des plus » frappantes a pour objet la manière de diviser une voûte en » voussoirs par des joints.

» Les joints des voûtes doivent satisfaire en même temps à un » assez grand nombre de conditions, dont les principales sont, » 1° d'être partout perpendiculaires à la surface de la voûte, afin » que les angles des deux voussoirs consécutifs étant égaux entre » eux, ils résistent également à leur rupture dans l'action que ces » voussoirs exercent l'un sur l'autre; 2°. d'être perpendiculaires » entre eux, par la même raison; 3° d'être engendrés par le mou- » vement d'une ligne droite; car les surfaces engendrées de cette » manière, sont les seules qui soient susceptibles d'une exécution » exacte; et il faut que les joints des voussoirs contigus soient par- » faitement exécutés, parce que de légères incorrections entraîne- » raient la rupture de l'un de ces voussoirs; 4° d'être formés par des » surfaces développables, afin que les panneaux puissent être appli- » qués sur les différentes faces, et en donner les contours d'une » manière rigoureuse.

» On voit que toutes ces conditions seraient remplies en même » temps, si l'on divisait la surface de la voûte par des lignes de l'une » et de l'autre des deux courbures, qui fussent espacées entre elles » d'une quantité finie dépendante des matériaux, et si les joints » étaient formés par les surfaces développables normales à la surface » de la voûte.

» D'ailleurs si les joints étaient apparens sur la surface de la » voûte, ils y traceraient des courbes toutes rectangulaires entre » elles, et qui, dépendant de la nature même de la surface, en » rendraient la génération plus prononcée. Enfin, ces lignes elles- » mêmes diviseraient la surface de la voûte en compartimens » rectangulaires, et susceptibles d'une décoration propre à la » surface.

» C'est vers cette solution générale que les artistes s'étaient tou- » jours dirigés; ils ne l'avaient atteinte que pour les cas faciles des » surfaces cylindriques, des surfaces coniques et de celles de révo- » lution. Quant aux autres surfaces courbes dont ils ne connaissaient » pas les lignes de courbure, ils les excluaient presque générale-

» ment de la composition des voûtes, lors même que les circons-
» tances l'exigeaient impérieusement ; et c'est à cela principalement
» qu'on doit attribuer les mauvais effets que produisent en général
» dans l'architecture, les morceaux de traits de coupe des pierres,
» parce que, pour rendre un trait exécutable, on choisit pour la
» voûte une surface qui n'est pas toujours celle que la nature des
» choses commanderait. »

57. *Berceau dont les joints concourent à un centre commun.*

Les principes du numéro précédent doivent être observés autant qu'on le peut : néanmoins il est des circonstances ou des considérations plus puissantes qui peuvent déterminer à préférer une voûte dont les joints ne remplissent pas la condition d'être normaux à la surface courbe. Dans cet article, il sera question des berceaux dont les joints ont un centre commun et ne sont pas perpendiculaires à l'intrados. Lorsque l'intrados est circulaire, la double condition a lieu ; mais c'est le seul cas où cela arrive : dans tous les autres, on peut toujours trouver un extrados qui rende la voûte équilibrée ; c'est de quoi je vais m'occuper.

Soit (fig. 40) ASA′ la courbe donnée d'intrados, et $aS'a'$ l'extrados qu'il faut trouver pour former un berceau équilibré, tous les joints NM devant concourir à un point commun O.

Soit SOM $=\epsilon$, ON $=u$, OM $=$ R, OS $=a$, SS′ $=k$, OS $=a+k=$ A, SS′NM $=$ M, MN $=k$.

En raisonnant ici comme nous l'avons fait dans le n° 2 du premier chapitre, on verra d'abord qu'on a

$$\text{aire MN}nm = d\text{M} = \tfrac{1}{2}\text{K}\,(2\text{R}+\text{K})\,d\epsilon;$$

de plus, la voûte devant être équilibrée, on a pour exprimer cette condition, l'équation

$$\text{M} = c\,\text{tang}\,\epsilon$$

(c étant une constante quelconque) ; d'où

$$d\text{M} = \frac{c\,d\epsilon}{\cos^2\epsilon}.$$

Egalant ces deux valeurs de dM et mettant u pour $R+K$, on a

$$u^2 = R^2 + \frac{2c}{\cos^2 \varepsilon}.$$

La constante c se détermine par la condition qu'au point S on a

$$\cos \varepsilon = 1, \quad R = a, \quad u = A;$$

ce qui donne

$$2c = A^2 - a^2;$$

d'où enfin

$$u^2 = R^2 + \frac{A^2 - a^2}{\cos^2 \varepsilon} \ldots . (39).$$

Tout est connu dans cette équation, puisque le rayon vecteur R est donné par l'équation d'intrados en fonction de ε : il sera donc aisé d'avoir u et par conséquent de construire l'extrados.

Supposons, par exemple, que l'intrados soit (fig. 51) une ligne droite horizontale, on aura

$$R = a \frac{1}{\cos \varepsilon};$$

et l'équation (39) devient

$$u = \frac{A}{\cos \zeta};$$

c'est-à-dire que l'extrados est aussi une ligne droite horizontale; ainsi que nous l'avons vu n° 37.

Supposons en second lieu que l'intrados (fig. 40) soit composé de deux lignes droites faisant avec la verticale, un angle $OSM = \zeta$, on trouvera

$$R = \frac{a \sin \zeta}{\sin (\zeta + \varepsilon)},$$

et en substituant cette valeur de R dans l'équation (39) ci-dessus, on aura l'équation polaire de l'extrados.

Il ne sera pas plus difficile, dans tous les autres cas, d'avoir l'équation polaire de l'extrados en u et ε, puisqu'on connaît celle de l'extrados aussi polaire entre R et ε.

A l'égard de la poussée de ces sortes de berceaux, il est évident, puisqu'ils sont équilibrés, qu'elle est M cot ε, c'est-à-dire c, ou $\frac{1}{2}(A^2 - a^2)$, ou $ak + \frac{1}{2} k^2$. Quant à l'équation d'équilibre de rota-

tion, il serait superflu de la rapporter, puisqu'elle est la même que celle du n° 24.

Observons que les berceaux dont il s'agit ici offrent plus de facilité pour l'épure, parce que tous les joints concourent à un centre commun : un autre avantage, c'est de pouvoir employer la ligne droite pour intrados ; c'est à l'Architecte à peser ces avantages avec l'inconvénient qui résulte de ce que les joints ne sont pas perpendiculaires à l'intrados.

58. *Dômes dont les joints concourent à un centre commun.*

La figure 41 représente une section verticale du dôme proposé et de son tambour. On a, comme dans le numéro précédent,

$$\text{aire MN}nm = \tfrac{1}{2}\,\text{K}\,(2\text{R}+\text{K})\,d\varepsilon.$$

On verra aisément que la distance GG′ du centre d'inertie de cette aire à la montée est

$$\text{R}\sin\varepsilon + \tfrac{1}{3}\text{K}\frac{3\text{R}+2\text{K}}{2\text{R}+\text{K}}\sin\varepsilon \quad \text{ou} \quad \tfrac{2}{3}\sin\varepsilon\,\frac{3\text{R}^2+3\text{RK}+\text{K}^2}{2\text{R}+\text{K}}.$$

Si on multiplie l'aire ci-dessus par $2m.\text{GG}'$, on aura, d'après le principe de la méthode centrobarique, le volume d'une assise élémentaire de voussoirs compris dans une section horizontale du dôme : ainsi, en appelant M le volume de la calotte correspondante, on aura pour l'expression de cette assise,

$$d\text{M} = 2m.\text{GG}'.\text{MN}nm = \tfrac{2}{3}\,m\text{K}d\varepsilon\,\sin\varepsilon\,(3\text{R}^2 + 3\text{RK} + \text{K}^2);$$

ou, à cause de $\text{R}+\text{K} = u$,

$$d\text{M} = \tfrac{2}{3}\,md\varepsilon.\sin\varepsilon\,(u^3 - \text{R}^3).$$

D'un autre côté on a pour exprimer la condition d'équilibre entre toutes les assises, l'équation

$$\text{M} = c\,\text{tang}\,\varepsilon \quad \text{ou} \quad d\text{M} = \frac{c\,d\varepsilon}{\cos^2\varepsilon}.$$

Egalant ces deux expressions de dM, on a pour l'équation polaire

de l'extrados générateur,

$$u^3 = R^3 + \frac{3c}{2m \sin \epsilon \, \overline{\cos \epsilon}^2} \ldots\ldots\ldots (40).$$

Il reste à déterminer la constante c. Nous retrouverons ici la singularité que nous avons déjà remarquée dans les dômes du chapitre III : si on veut déterminer c par la valeur a que reçoit R au point S, où sin $\epsilon = 0$, on ne trouve pour c que zéro, ou bien $\frac{0}{0}$ si l'on fait u infinie au point S. Cela vient de ce que le dôme est terminé à la clef par une flèche. Mais on peut se servir du point A des naissances pour déterminer c. En effet, si α est alors la valeur de ϵ, R′ celle de R, et u' celle que l'on veut donner à u, l'équation (40) donnera

$$c = \tfrac{2}{3}\, m \sin \alpha \, \overline{\cos \alpha}^2 ({'u}^3 - {'R}^3,$$

quantité finie. Mettant cette valeur de c dans l'équation (40′), on aura

$$u^3 = R^3 + \frac{\sin \alpha \, \overline{\cos \alpha}^2 ({'u}^3 - {'R}^3)}{\sin \epsilon \, \overline{\cos \epsilon}^2} \ldots\ldots (40'),$$

équation au moyen de laquelle on pourra connaître u, et construire l'extrados, puisqu'on connaîtra l'équation polaire de l'intrados en R et ϵ.

A l'égard de la poussée des dômes en question, elle est toujours c, et l'équation d'équilibre de rotation est la même que nous avons donnée dans le chapitre IV.

Au reste, on peut faire sur les avantages et les inconvéniens de ces sortes de dômes, les mêmes observations que dans l'article précédent. Ajoutons que dans la pratique, on peut remplacer une portion infinie de la flèche par un poids d'une grandeur finie, comme un globe, un cylindre, une pyramide, etc.

Dans la figure 41, l'intrados générateur est une ligne droite horizontale, et par conséquent la surface d'intrados un plan ou cercle horizontal. Ce dôme est l'analogue du berceau plat équilibré. Il offre le moyen curieux de recouvrir une tour ronde par un plafond circulaire équilibré.

Dans la figure 36, l'intrados générateur est circulaire : nous en avons déjà parlé n° 43. On peut déduire l'équation polaire de l'extrados de la formule (34); mais on y parvient plus simplement par l'équation (40') du présent article. En effet, R est ici constant : c'est le rayon même de la sphère d'intrados, et l'on a $R' = R$ (α sera l'angle du rayon vecteur u' dans le point où l'on veut que l'épaisseur du dôme soit $u' - R$). Ainsi l'on voit qu'il suffit de faire R constant dans l'équation (40'), pour avoir l'équation polaire de l'extrados générateur du dôme dont la surface d'intrados est sphérique.

SECTION II.

Des Voûtes à base régulière et symétrique.

59. *Etant donnée la surface d'intrados, trouver celle d'extrados.*

Quelle que soit la base recouverte par le dôme, si la surface d'intrados est donnée, on peut toujours trouver la surface d'extrados qui rend la voûte équilibrée : il suffit d'imaginer par la montée ou axe vertical, une infinité de plans verticaux qui partageront la voûte en secteurs ou voûtes élémentaires partielles. On calculera l'épaisseur K pour chaque point d'un secteur quelconque, comme nous l'avons vu dans le n° 43, et les voussoirs de chaque voûte élémentaire seront en équilibre entre eux. Il n'est pas moins évident que la base étant supposée régulière et symétrique, deux voûtes élémentaires et opposées se feront mutuellement équilibre à la clef : cela se conçoit facilement quand la base est terminée par une ligne courbe comme une ellipse ou un polygone d'un nombre pair de côtés. Il en sera de même quand la base sera un polygone régulier d'un nombre impair de côtés : alors il faut pour concevoir l'équilibre, se représenter trois, ou cinq, ou sept, etc. voûtes élémentaires symétriquement placées se buttant toutes ensemble à la clef, suivant que le polygone de la base a trois, cinq, sept, etc. côtés.

La poussée de chaque voûte élémentaire se calculera comme nous l'avons fait dans le chapitre IV; mais on sent qu'ici les secteurs

étant inégaux, leurs poussées seront aussi inégales, ainsi que l'épaisseur correspondante du tambour. Le polygone extérieur de la base du tambour aura une figure analogue à celle du polygone intérieur.

Il manquera une perfection à ces sortes de dômes : les joints ne seront point normaux à la surface d'intrados; leur succession ne formera pas les lignes de courbure dont nous avons parlé dans le n° 56. Cependant les premières suites de joints qui sont dans les plans verticaux seront agréables à l'œil, puisqu'elles formeront des méridiens partant du pôle commun : on pourra même rendre régulière la seconde suite de joints. Il suffit pour cela d'imaginer un certain nombre de plans horizontaux qui coupent la surface d'intrados. Si le nombre des méridiens est assez grand, les petits plans inclinés qui séparent les voussoirs d'une voûte élémentaire se confondront sensiblement avec les cercles parallèles dont j'ai parlé; ensorte que la seconde suite de joints présentera à l'œil l'aspect d'une section horizontale. Il restera toujours l'inconvénient que les quatre petits plans qui comprennent un voussoir, ne seront point normaux à la surface d'intrados, si ce n'est pour le cas de l'ellipsoïde dans les deux sections qui passent par les axes.

60. *Cas où l'épaisseur du dôme doit être uniforme.*

Si l'épaisseur de la voûte doit être constante, il résulte du numéro précédent que chaque voûte élémentaire partielle doit avoir pour section verticale la courbe du n° 45, à laquelle j'ai donné par analogie le nom de chaînette croissante, parce qu'elle engendre le dôme d'épaisseur égale à base circulaire, de la même manière que la chaînette ordinaire engendre, par son mouvement parallèle, le berceau d'épaisseur égale. Toutes ces chaînettes croissantes qui composeront le dôme, auront la même montée avec des bases différentes. La constante c' qu'on pourrait appeler le paramètre de la chaînette croissante, sera variable pour chaque section. Chaque voussoir sera compris entre deux plans ou méridiens et deux petits plans inclinés perpendiculaires au méridien moyen, intermédiaire entre les deux méridiens précédens.

On pourrait, d'après la génération précédente, trouver l'équation

tion de la surface d'intrados, lorsqu'on connaît la base que doit recouvrir le dôme. Si cette base est une ellipse et que la montée soit donnée, le problème est déterminé.

On peut encore recouvrir une base quelconque par une autre surface courbe qui formera un dôme d'épaisseur égal et différent du précédent : cette seconde surface doit être engendrée par une chaînette ordinaire qui se meut parallèlement à elle-même.

Imaginons une ligne horizontale quelconque passant par le centre de figure de la base et par l'un des angles du polygone régulier, sur cette ligne un plan vertical, et dans ce plan une ligne courbe quelconque que j'appelle directrice. Imaginons maintenant une infinité de chaînettes ordinaires posées verticalement l'une contre l'autre, s'appuyant par leurs extrémités sur le contour de la base, et ayant toutes leurs sommets dans la directrice ci-dessus. Il est évident que la réunion de toutes ces chaînettes dont le paramètre c ou le rayon de courbure au sommet est variable, formera un dôme équilibré; car il sera composé d'une infinité de tranches verticales parallèles dont chacune est un petit berceau en chaînettes. Tous ces petits berceaux se soutiendraient isolément, si on supprimait ceux qui sont voisins. La surface d'intrados présentera l'aspect d'une suite de chaînettes verticales parallèles, et l'on pourra faire rencontrer dans des sections horizontales les joints de lit de tous les voussoirs : ce qui formera des compartimens agréables à l'œil, mais qui n'auront pas l'avantage d'être perpendiculaires aux faces des voussoirs.

Si la base est renfermée par une courbe régulière, comme une ellipse, on pourra exprimer analytiquement l'équation de l'intrados.

On peut encore obtenir par le moyen de la chaînette ordinaire, un autre dôme équilibré différent du précédent. Imaginons une chaînette ordinaire ayant son sommet à la clef donnée de position, et s'appuyant sur deux points symétriques du contour de la base : si on fait mouvoir cette chaînette parallèlement à elle-même, de manière que son axe soit toujours vertical et que ses extrémités touchent toujours le contour de la base, elle engendrera un dôme équilibré ; mais ici la directrice que suit le sommet de la chaînette n'est plus arbitraire comme précédemment, quoiqu'elle soit toujours une courbe tracée dans un plan vertical. Cette seconde génération

est plus simple que la première, en ce que le paramètre c est constant : c'est un cas particulier du précédent, où chaque section verticale était une chaînette d'un rayon de courbure variable pour son sommet, tandis que dans le second cas, chaque berceau élémentaire n'est qu'une portion plus ou moins grande de la même chaînette.

On voit par ce qui précède, qu'une base donnée peut être découverte par une infinité de dômes équilibrés, la montée étant la même. En premier lieu, on peut se donner la surface d'intrados et trouver celle d'extrados correspondante. En second lieu, si l'épaisseur doit être uniforme et que la base soit par exemple un cercle, on engendre un dôme équilibré par la révolution d'une chaînette croissante. On engendre encore un dôme équilibré par la *juxtaposition* d'une infinité de chaînettes ordinaires et différentes dont les sommets sont sur une directrice quelconque. Enfin, on a encore un dôme équilibré par le mouvement parallèle d'une même chaînette ordinaire touchant toujours le même contour de la base.

Mais il manque à tous ces dômes la condition d'avoir les joints normaux à la surface d'intrados. Il reste donc encore ce problème à résoudre.

Etant donnée la base quelconque d'un dôme et la surface d'intrados, trouver la surface d'extrados qui forme un dôme équilibré, avec cette condition que tous les joints des voussoirs soient normaux à la surface d'intrados.

Par exemple, si la base est une ellipse, et la surface d'intrados un ellipsoïde dont les deux sections verticales passant par les axes de la base, soient aussi des ellipses. M. Monge a bien déterminé les deux lignes de courbure qui doivent former les joints, mais il reste à trouver la surface d'extrados; car si l'on fait l'épaisseur constante, l'ellipsoïde de M. Monge ne sera pas un dôme équilibré. Pour avoir la surface d'extrados qui formerait avec cet ellipsoïde pour intrados, un dôme équilibré, il faut se figurer un petit coin rectangulaire ou voussoir compris entre quatre lignes de courbure du n° 56. Le principe qu'il faut employer est que ce petit voussoir doit être en équilibre entre les quatre autres qui le pressent dans deux sens perpendiculaires, de la même manière qu'il l'était dans un sens seulement pour les cas des berceaux et des dômes à base

circulaire. On sent que la difficulté sera bien plus grande, parce que chaque voussoir repose sur un plan incliné, et qu'il faut faire entrer dans le calcul les équations des lignes de courbure. Quand on aura surmonté toutes les difficultés, on n'aura pas encore le dôme le plus parfait, puisqu'il n'aura pas une épaisseur uniforme, et que les joints ne seront pas normaux à l'extrados. Je vais, dans le numéro suivant, exposer de nouvelles considérations qui fourniront d'autres dômes équilibrés d'épaisseur égale.

61. *Dôme d'épaisseur uniforme, à base elliptique.*

Soit (fig. 42) AEA'E' l'ellipse que doit recouvrir le dôme dont on ne connaît que la montée OS $= a$ (fig. 43). Soit KL la développée du quart d'ellipse AE et NI', nI' deux rayons de courbure infiniment proches. Imaginons qu'on ait divisé tout le contour de l'ellipse en petits arcs tels que Nn, et mené tous les rayons de courbure tels que NI; qu'ensuite sur toutes ces lignes NI', on ait élevé des plans verticaux. Soient (fig. 44) NPII', npII' deux de ces plans infiniment voisins, dont la commune section est la verticale II'; il faut redresser ces plans par la pensée en les faisant tourner autour des horizontales I'N, I'n, jusqu'à ce que les lignes IP, Ip deviennent horizontales. Il faut concevoir ensuite deux arcs de chaînette croissante PN, pn dans les plans verticaux ci-dessus. Ces arcs ont leur tangente horizontale dans les points P et p, dont les points P' et p' de la figure 42 sont les projections horizontales : ensorte que PNnp est un élément de la surface du dôme reposant par le petit arc Nn sur le tambour, et s'appuyant par son extrémité supérieure Pp contre un pareil élément symétriquement placé.

La figure 43 représente une section verticale du dôme et du tambour, faite par un plan vertical passant par le grand axe de l'ellipse; kk' est une ligne horizontale passant par la clef donnée de position; Kk, K'k' sont deux verticales élevées sur les origines K et K' des quatre branches de la développée de l'ellipse; kA, k'A' sont deux arcs de chaînette croissante. Il faut relever par la pensée la ligne kk' au-dessus de sa projection horizontale KK', et concevoir que de tous les points de cette ligne kk', que j'appellerai crête du dôme ou ligne des sommets, on ait mené de part et d'autre des arcs de chaînette croissante, verticaux et perpendiculaires à tous les

points N de l'ellipse, tels que PN de la figure 44. La surface courbe qui résultera de cette génération, en lui donnant une épaisseur uniforme, formera un dôme équilibré.

En effet, les voussoirs d'un secteur quelconque, tel que PN*np*, seront équilibrés entre eux et formeront une petite voûte partielle; car si (fig. 44) on faisait tourner autour de la ligne II′ comme axe vertical, la ligne horizontale IP et l'arc vertical PN, on engendrerait un plateau, plus une zône de dôme à base circulaire dont le secteur PN*np* serait un élément ou voûte partielle. Il n'est pas moins évident, à cause de la figure symétrique du dôme, que tous les secteurs étant indépendans les uns des autres et ne se pressant qu'à la crête, il y aura aussi équilibre dans le sens horizontal : quatre secteurs symétriquement placés dans les quatre quarts de l'ellipse, produiront deux à deux, et en sens contraire, une pression horizontale dirigée suivant la crête et détruite par une pression égale et opposée. Les plans verticaux élevés sur les normales à l'ellipse de la base, déterminent par leur rencontre avec le plan vertical passant par le grand axe, les secteurs du dôme et le système de l'une des lignes de courbure. L'autre ligne de courbure est formée par le mouvement d'une ligne qui, toujours perpendiculaire à la surface courbe, ferait le tour du dôme en coupant perpendiculairement chaque méridien, et en décrivant une petite surface conique dans chaque secteur et variable pour chacun.

On voit que le problème a plusieurs solutions, et qu'on pourrait, par exemple, après avoir tracé une courbe quelconque ou directrice dans le plan vertical passant par le grand axe, lui faire aboutir à tous les points du contour de la base des secteurs verticaux de chaînette croissante, comme nous avons fait.

Il n'entre pas dans mon objet de discuter, sous le rapport de la décoration, le dôme que je viens de décrire : je me bornerai à observer qu'il est parfaitement régulier, symétrique, et que sa crête horizontale paraît devoir produire un effet agréable : ces deux extrémités indiquent naturellement la position de deux lustres.

Il reste à donner l'équation de la courbe donnée par la section d'un plan vertical perpendiculaire à l'ellipse de la base. J'ai supposé que cette courbe était celle que j'ai appelée chaînette crois-

sante dans le n° 45 : elle est bien de la même famille, mais elle renferme une constante de plus qui est différente pour chaque point de l'ellipse. Dans le dôme à base circulaire, la même courbe engendre tous les secteurs par sa révolution autour de la montée qui est l'axe commun, et l'on a $x=0$ quand $y=0$ (x étant l'abscisse verticale, et y l'ordonnée horizontale). Ici, au contraire, chaque secteur est engendré par une courbe qui sans être différente, a cependant des constantes différentes : ce n'est plus la montée qui est l'axe commun de révolution ; chaque secteur a son axe particulier qui est la verticale II′, égale à la montée, et passant par l'extrémité I du rayon de courbure. De plus, le dôme ne comprend que la partie du secteur comprise entre l'ellipse de la base et le plan vertical élevé sur le grand axe. En comptant les x sur l'axe variable II′ de position, on a $x=0$ quand $y=\mathrm{IP}'=i$.

En retournant donc au n° 46, et déterminant par cette condition la constante de l'équation

$$\frac{y^2}{2c}=\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+\text{constante},$$

on aura

$$\frac{y^2-i^2}{2c}=\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right).$$

En achevant les calculs comme nous avons fait dans l'article cité, on a pour l'équation de la courbe génératrice d'un secteur quelconque, c'est-à-dire pour l'équation d'une section verticale normale quelconque,

$$x=\frac{c'}{1}\int dy\,(y^2-i^2)+\frac{c'^3}{1.2.3}\int dy\,(y^2-i^2)^3$$
$$+\frac{c'^5}{1.2.3.4.5}\int dy\,(y^2-i^2)^5+\text{etc.}+c''\ldots(a),$$

équation qui s'intègre aisément, puisque tous les termes étant developpés, sont des monomes, et que la quantité i est constante pour chaque section. On détermine l'une des deux constantes par la condition qu'on ait $x=0$ quand $y=i$, et l'autre constante par la condition qu'on ait pour chaque section $x=a$ quand $y=n+i=\mathrm{R}'$, en faisant (fig. 42) $\mathrm{NP}'=n$, $\mathrm{NI}'=\mathrm{R}'$.

En intégrant l'équation (a) et déterminant c'' comme il vient d'être

dit, on a

$$\dot{x}=\frac{c'}{1}\left(\tfrac{1}{3}y^3-i^2y\right)+\frac{'c^3}{1,2.3}\left(\tfrac{1}{7}y^7-\tfrac{3}{5}i^2y^5+i^4y^3-i^6y\right)$$
$$+\frac{'c^5}{1.2.3.4.5}\left(\tfrac{1}{11}y^{11}-\tfrac{5}{9}i^2y^9+\tfrac{10}{7}i^4y^7-\tfrac{10}{5}i^6y^5+\tfrac{5}{3}i^8y^3-i^{10}y\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c''\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

$$C''=\frac{c'}{1}\cdot\frac{1.2}{1.3}i^3+\frac{'c^3}{1.2.3}\cdot\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}i^7+\frac{'c^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11}i^{11}+\text{etc.},$$

ou

$$C''=\frac{2}{3}c'i^3+\frac{4.6}{3^2.5.7}{'c^3}i^7+\frac{6.8.10}{3^2.5^2.7.9.11}{'c^5}i^{11}+\frac{8.10.12.14}{3^2.5^2.7^2.9.11.13.15}{'c^7}i^{15}+\text{etc.}$$

$$C'=\frac{3a}{'R^3}-\frac{27.a^3}{14.'R^6}+\frac{27^2.a^5}{14^2.'R^6}-\frac{27^3.a^7}{14^3.'R^9}+\ldots\ldots(\textit{voyez n° 45}).$$

Au moyen de ces expressions, on a tout ce qu'il faut pour déterminer la courbe d'une section verticale quelconque. Imaginant ensuite la montée divisée en un certain nombre de parties par des plans horizontaux, ces plans détermineront dans chaque courbe verticale ou chaînette croissante, un même nombre de points dont les projections horizontales formeront des courbes fermées (fig. 45) qui seront les projections des sections horizontales. Les normales et les ovales de cette même figure suffiront pour construire l'épure de la voûte.

Il resterait pour compléter la discussion du dôme dont il s'agit, à donner l'équation des ovales, ainsi que celle de la surface courbe du dôme dont tous les points étant assujétis à la même loi de continuité, sont susceptibles d'être représentés par la même équation.

Je dois prévenir deux objections qui pourraient embarrasser.

1°. On pourrait dire que les voussoirs qui touchent la ligne des sommets kk' étant triangulaires, ils sont trop faibles pour contrebalancer les voussoirs rectangulaires sur lesquels ils reposent; mais il faut faire attention que ces triangles sont des infiniment petits du second ordre, que plus on prend les arcs N*n* petits, plus ces triangles diminuent de grandeur et qu'ils finissent par s'anéantir, ensorte que quand le nombre des secteurs est infiniment grand, les voussoirs qui touchent la crête sont, sinon rectangulaires, du moins aussi pesans que si on leur ajoutait le triangle infiniment petit

du second ordre qui a été séparé par le plan vertical de la crête : ainsi l'objection disparaît.

2°. On peut dire que les joints sont bien partout des portions de surface développables, ainsi que cela doit être (n° 56); mais que les voussoirs qui touchent la ligne des sommets, n'ont pas leurs quatre faces perpendiculaires entre elles, et que ce sont des trapèzes : je réponds que cela ne peut être différemment, et qu'il en est de même dans les dômes à base circulaire dont les voussoirs qui entourent le pôle sont triangulaires, tandis que tous les autres sont rectangulaires. Pour éviter l'inconvénient de ces voussoirs triangulaires dans ces dômes, on forme la clef de leur réunion, et cette clef a la figure d'un petit sphéroïde ou d'une calotte. Dans le dôme à base elliptique, la ligne des sommets n'est qu'une suite de pôles, et on peut, par analogie, appeler clef la calotte ovoïdale qui a pour projection le plus petit des ovales, celui qui renferme la ligne kk' des sommets ou lignes des pôles.

A mesure que l'ellipse de la base approche du cercle, la ligne horizontale des pôles diminue : enfin quand on fait $i = 0$ et $kk' = 0$ dans les calculs précédens, on a le dôme à base circulaire.

Il manque au dôme que je viens de décrire, comme à toutes les voûtes dont j'ai parlé dans cette section, la condition d'avoir les joints normaux à la surface courbe, du moins ceux qui sont dans les plans verticaux. Il faudrait, pour que cette condition eût lieu, que les ovales formées par les projections des sections horizontales, fussent des courbes parallèles à l'ellipse, c'est-à-dire des développantes de la même développée. Cela existerait si toutes les sections verticales étaient des arcs égaux de la même courbe. Par exemple, si l'on imagine qu'ayant fixé au point N du rayon de courbure NT', un arc vertical de courbe quelconque, on développe les rayons successifs de courbure, l'arc ci-dessus engendrera par son mouvement une surface qui sera telle, que toutes les projections des sections horizontales formeront des ovales parallèles à l'ellipse. Tous les joints de l'une et l'autre courbures auront les conditions du n° 56, c'est-à-dire seront des surfaces développables, normales et perpendiculaires entre elles; mais la surface courbe n'admettra pas une épaisseur constante, quand même on choisirait pour la courbe gé-

nératrice la chaînette croissante, parce que les constantes de cette courbe doivent varier pour chaque axe de rotation des secteurs. On pourra, il est vrai, trouver l'épaisseur que doit avoir chaque voussoir pour l'état d'équilibre, en considérant chaque secteur en particulier, comme nous l'avons dit au commencement de cette section.

Il résulte de ce qui précède, qu'il est impossible de trouver une surface pour laquelle l'épaisseur soit constante, et dont les sections verticales normales à l'ellipse soient aussi des lignes de courbure normales à la surface. Il faudra donc renoncer à l'une ou l'autre de ces deux conditions, toutes deux desirables. J'ai décrit plusieurs dômes équilibrés d'épaisseur constante, mais dans lesquels les joints verticaux ne sont point normaux à la surface. Il reste à résoudre ce problème : Faire un dôme à base elliptique, dont la montée est donnée, d'une épaisseur uniforme, et dont tous les joints soient des surfaces développables normales au dôme et perpendiculaires entre eux. Aucune des deux lignes de courbure ne pourra être des sections verticales, ainsi que je l'ai fait voir, à moins qu'on ne fasse les deux axes de l'ellipse égaux. Dans ce cas particulier, la section verticale deviendra une ligne de courbure et sera une chaînette croissante passant par le pôle. Ce problème est le plus difficile qu'on puisse proposer sur cette matière. Il est probable que M. Monge s'en serait occupé s'il y eût songé. Il serait surperflu de nous occuper davantage des bases en polygone régulier. On sent assez, d'après ce qui précède, ce qu'il y a à faire. J'ajouterai seulement que si l'on fait pénétrer deux berceaux en chaînette, on obtient deux voûtes analogues aux voûtes d'arête et en arc de cloître, qui sont équilibrés dans tous leurs points, excepté dans les intersections qui séparent les quatre nappes : ces deux espèces de voûtes seront très-préférables aux voûtes ordinaires d'arêtes et en arc de cloître.

APPENDICE.

Observations préliminaires.

On a donné le nom d'anse de panier à une courbe ASa (fig. 46), composée de trois, cinq, sept, etc. arcs de cercles, qui dans leurs points de réunion M, M', m, m' (fig. 50) ont la même tangente : on emploie les anses de panier dans la construction des ponts, à cause de la facilité de l'épure. La difficulté de tracer des arcs elliptiques leur a fait préférer un assemblage de petits arcs de cercles plus faciles à décrire. Les anses de panier ont encore d'autres avantages : elles laissent passer un plus grand volume d'eau, l'ouverture du pont et la montée restant les mêmes : elles sont pour l'ordinaire plus gracieuses à l'œil que l'ellipse.

Voici comment on peut concevoir la génération d'une anse de panier. Soit (fig. 50) A l'une des naissances du pont, S la clef, OS la montée : imaginons un polygone $AA'A''A'''A^{\text{IV}}T$ d'un nombre quelconque de côtés, dont le premier AA' est pris sur la ligne des naissances, et le dernier $A^{\text{IV}}T$ se termine à la montée prolongée. Si l'on imagine un fil enveloppant ce polygone, et qu'on le développe par son extrémité A, il tracera successivement plusieurs arcs de cercle AM, MM', $M'M''$, $M''M'''$, $M'''S$, ayant leurs centres en A', A'', A''', A^{IV}, T. Un polygone pareil engendrera de l'autre côté de la montée des arcs égaux aux précédens, et l'ensemble de ces arcs sera ce qu'on appelle une anse de panier. Ainsi une anse de panier n'est autre chose que la développante d'un polygone ; elle est dite à 3 centres, à 5, à 7, etc., suivant le nombre d'arcs dont elle est formée : cette courbe ressemble à une ellipse, en ce

qu'elle est perpendiculaire sur la ligne des naissances et sur la montée.

On voit que sur une même base et une même montée, on peut tracer une infinité d'anses de panier. Le problème est d'autant plus indéterminé, que le nombre des centres est plus grand. On peut assujétir l'anse à certaines conditions, comme de passer par des points donnés, d'avoir les arcs d'un nombre de degrés donnés, d'avoir les rayons dans tels ou tels rapports, et le problème peut ainsi devenir déterminé. Il serait impossible de discuter toutes les combinaisons qu'on peut adopter : ce que nous dirons dans les problèmes suivans suffira pour guider dans tous les cas.

PROBLÈME PREMIER.

Des anses de panier à trois centres.

Si le polygone n'a que deux côtés AA', A'T, il n'y aura que trois centres A', T, a', et l'anse est dite à trois centres (fig. 46). Le problème, comme on voit, consiste à trouver sur la ligne des naissances et sur la montée prolongée, deux points A' et T, tels que l'on ait

$$AA' + A'T = TS :$$

cela peut se faire d'une infinité de manières par la construction suivante.

Prenez une portion quelconque SS' de la montée SO, et portez-la de A en A' : menez la ligne A'S', et sur le milieu I de cette ligne, élevez la perpendiculaire IT, qui rencontrera en T la montée prolongée : le point T sera le centre de l'arc moyen Mm, et A' celui de l'arc extrême AM.

En effet, par cette construction, on a

$$A'T = S'T \quad \text{et} \quad AA' = SS' :$$

donc

$$AA' + A'T = TS,$$

comme l'exige la question.

Le point S' pouvant être pris à volonté dans l'etendue de SO, il

s'ensuit que le problème a une infinité de solutions renfermées entre les deux limites AA' = o et AA' = SO : ces deux cas extrêmes sont représentés par les figures 47 et 48. Dans le second cas de la figure 48, l'arc AM est de 90°, et l'arc MS dégénère en ligne droite. Il est aisé de voir que dans ce cas, l'espace AMSO est le plus grand possible ; d'où l'on conclut que plus l'anse de panier approchera de cette limite, plus le volume d'eau qui peut passer sous l'arche sera grand.

Pour avoir l'expression algébrique des deux rayons AA' et ST, appelons le premier r et le second R : faisons de plus AO = b, SO = a, on aura

$$A'T = \sqrt{(b-r)^2+(R-a)^2},$$

et l'équation AA' + A'T = ST devient

$$r + \sqrt{(b-r)^2+(R-a)^2} = R,$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{b^2+a^2-2br}{2a-2r};$$

cette équation fait voir que lorsque $r = o$, on a $R = \frac{b^2+a^2}{2a}$, c'est le cas de la figure 47, et que r ne peut pas être plus grand que a, puisqu'alors R est infini : c'est le cas de la figure 48. Je ne m'arrête pas à démontrer que l'équation $R = \frac{b^2+a^2-2br}{2a-2r}$ fournit la construction que j'ai donnée plus haut.

Pour avoir le rapport entre le rayon extrême r et l'angle AA'M, soit cet angle égal $\mathcal{C}$, on aura

$$OT = \frac{\sin\mathcal{C}}{\cos\mathcal{C}}(b-r), \quad A'T = \frac{b-r}{\cos\mathcal{C}};$$

l'équation AA' + A'T = TS devient

$$r + \frac{b-r}{\cos\mathcal{C}} = a + \frac{\sin\mathcal{C}}{\cos\mathcal{C}}(b-r);$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{a\cos\mathcal{C} + b\sin\mathcal{C} - b}{\cos\mathcal{C} + \sin\mathcal{C} - 1}.$$

Nous venons de voir que plus l'angle $\mathcal{C}$ approche d'être droit,

plus R est grand, et plus le volume d'eau compris sous l'arche est considérable : il est néanmoins une considération d'un autre genre qui doit empêcher de prendre R trop grand. L'élégance et la grace du coup-d'œil exigent que les deux rayons r et R diffèrent le moins possible, afin qu'on ne passe pas dans le point M de raccordement des deux arcs, d'une grande courbure à une autre beaucoup plus petite. Pour remplir cette condition, il faut que $\frac{R}{r}$, c'est-à-dire, $\frac{b^2+a^2-2b^2}{2ar-2r^2}$ soit un *minimum* : égalant à zéro la différentielle de cette quantité, on en tire

$$r=\frac{b^2+a^2-(b-a)\sqrt{(b^2+a^2)}}{2b},$$

et ensuite

$$R=\frac{b^2+a^2+(b-a)\sqrt{b^2+a^2}}{2a}.$$

J'observe que je n'ai pas fait précéder le radical du double *signe* $\pm$, parce que la solution indiquée par le signe que j'ai omis, ne résout pas la question présente.

PROBLÈME II.

Etant donnée l'ouverture, la montée ainsi que le nombre de degrés des arcs, excepté les deux derniers voisins de la clef, d'une demi-anse à un nombre quelconque de centres, tracer cette anse.

Soit AMM'M''M'''.....S la demi-anse à tracer (fig. 50). Les conditions à remplir sont, 1°. que le contour du polygone AA'A''A'''A^{iv}T soit égal à TS; 2°. que le polygone n'ait point d'angles rentrans : j'en ai déduit la construction suivante.

1°. Prenez une portion SS' de la montée, et portez-la de A en A' : le point A' sera le premier centre.

2°. Faites l'angle AA'M égal à l'angle donné, et ayant prolongé MA' jusques en k sur la montée prolongée, marquez un point A'' qui sera le second centre cherché s'il remplit les deux conditions suivantes, savoir, 1°. si ayant porté A'A'' de S' en S'', le point A'' se trouve en dessous de l'horizontale passant par S''; 2°. si KS'' est plus petit que KA''.

3°. Faites l'angle MA''M' égal à l'angle donné, et ayant prolongé M'A'' jusques en k' sur la montée prolongée, prenez à volonté une partie A''A''' que vous porterez de S'' en S'''; ce point A''' sera le troisième centre, s'il réunit les même conditions que ci-dessus, savoir, 1°. si ce point A''' est en dessous de S'''; 2°. si K'S''' est plus petit que K'A'''..

4°. Vous marquerez de la même manière d'autres centres A^{IV}, A^{V}, etc. en les assujétissant aux mêmes conditions que ci-dessus.

5°. Enfin pour marquer le dernier centre T ou celui qui doit être sur le prolongement de la montée, il suffira de faire TA^{IV} = TS^{IV}, ce qui peut se faire sans tâtonnement en menant la ligne A^{IV}S^{IV}, et élevant sur son milieu une perpendiculaire qui déterminera le point T par sa rencontre avec la montée prolongée.

Il est à remarquer que par cette construction, on n'est pas maître de se donner l'avant-dernier angle M'''A^{IV}M''', car il déterminerait un autre point T qui ne serait pas également éloigné de A^{IV} et de S^{IV}, comme cela doit être.

Il est aisé de démontrer que les points A', A'', A''', A^{IV}, etc. doivent remplir les conditions prescrites. En effet, 1°. A'' doit être plus bas que S''; car si ces deux points étaient sur la même ligne horizontale, comme le reste du contour A''A''' + A'''A^{IV} + A^{IV}T doit être égal à S''T, cela ne pourrait jamais avoir lieu, à moins que T ne fût à une distance infinie. 2°. Il n'est pas moins évident que KS'' doit être plus petit que KA''; car si l'on avait KS'' = KA'', tout autre point quelconque T en dessous de K ne pourrait donner un contour TA^{IV}A'''A'' aussi long que TS'', parce que ce contour étant toujours plus petit que TK + KA'', serait aussi plus petit que TK + KS'': donc quand KS'' = KA'', le point K est le dernier centre et le polygone se termine là: donc pour le prolonger plus loin, il faut que KS'' soit plus petit que KA''.

On démontrera les deux mêmes conditions pour les autres angles saillans A''', A^{IV}, etc. du polygone.

PROBLÈME III.

Des Anses à cinq centres.

La construction générale que nous avons donnée dans le problème précédent, s'applique au cas présent. On reconnaîtra qu'il faudra, pour que le problème soit possible, que l'angle donné AA'M (fig. 49) soit tel que KS' soit plus petit que KA'.

Si au lieu de se donner l'angle AA'M, on voulait partir d'un point donné T pour le centre moyen, il faudrait d'abord, pour que le problème fût possible, que ce point T fût plus près de A que de S; car s'il était à égale distance, ce serait le cas de la figure 47.

Voici donc comment on s'y prendrait.

1°. On prendrait une portion SS' de la montée que l'on porterait de A en A' pour avoir le premier centre A', et il faudrait que T fût encore plus près de A' que de S'.

2°. Il s'agirait ensuite de trouver dans l'angle A'OT, un point A″ tel que la somme de ses distances aux deux points A' et T fût égale à TS'. Plusieurs points remplissent cette condition; ils sont tous placés sur une ellipse dont A' et T sont les foyers, et TS' la longueur du grand axe. Pour avoir un de ces points, il faut marquer un point S″, décrire du point A' comme centre, un arc avec le rayon A'A″ = S'S″, et ensuite du point T, comme centre, avec un rayon TS″ = TA″, décrire un second arc qui déterminera le centre cherché A″ par son intersection avec le premier, si elle a lieu dans l'angle A'OT.

En traçant l'ellipse dont nous avons parlé, on aurait sans tâtonnement tous les points qui peuvent être des centres A″: ils sont tous placés sur l'axe elliptique compris dans l'angle A'OT, et l'un de ces points peut être placé de manière que l'angle AA'M soit d'un nombre donné de degrés.

Si l'on voulait que les trois arcs AM, MM', M'S fussent d'un nombre donné de degrés, on diminuerait le nombre de tâtonnemens par la méthode analytique suivante.

Soit $AO=b$, $OS=a$, $AA'=r$, $ST=R$, $AA'M=\beta$, $MTS=\varphi$, on a

$$A'A''N=\text{comp.}(\beta+\varphi),$$

$$\sin A''NA'=\sin(NA'A''+A'A''N)=\sin(90^\circ-\varphi)=\cos\varphi.$$

Les triangles $A'A''N$ et NTO fournissent les expressions suivantes :

$$ON=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(R-a),\ NT=\frac{R-a}{\cos\varphi},\ A''N=\frac{\sin\beta}{\cos(\beta+\varphi)}\left(b-r-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(R-a)\right);$$

$$A'A''=\frac{\cos\varphi}{\cos(\beta+\varphi)}\left(b-r-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(R-a)\right).$$

Par la condition du problème, on doit avoir

$$AA'+A'A''+A''T=TS;$$

substituant dans cette équation les expressions algébriques des lignes, et faisant attention que $\cos(\beta+\varphi)=\cos\beta\cos\varphi-\sin\beta\sin\varphi$, on a, après les réductions, l'équation suivante

$$(\cos\varphi-\sin\beta)(b-r)-\cos(\beta+\varphi)(R-r)$$
$$+(\cos\beta-\sin\varphi)(R-a)=0\ldots\ldots\ldots.(A).$$

Dans les applications de cette formule, il ne faut pas oublier qu'on n'est pas le maître de choisir pour β et pour φ des angles à volonté : ces angles ont des limites qui dépendent du rapport entre b et a ; il faut donc prendre pour β et φ des valeurs telles, qu'elles puissent satisfaire aux deux conditions suivantes, savoir, que $r<a$ et $R>\frac{b^2+a^2-2br}{2a-2r}$.

Supposons, par exemple, qu'ayant $b=100$ et $a=10$, on voulût faire β de 40° et φ de 15°, l'équation (A) donnerait

$$R=410{,}0+3{,}770r;$$

or en prenant r plus petit que 10, la valeur qui en résulte pour R se trouve toujours plus petite que $\frac{b^2+a^2-2br}{2a-2r}$, tandis qu'elle doit être plus grande ; d'où il faut conclure que le problème est impossible avec ces données.

Mais si on veut que β soit de 48° et φ de 9°, l'équation (A)

donne alors

$$R = 604,53 + 9,379r,$$

et l'on trouve qu'en faisant r plus petit que 2,5, la valeur qui en résulte pour R est plus grande que $\frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r}$, et que par conséquent le problème a plusieurs solutions. Si l'on fait, par exemple, $r = 2$, on trouve $R = 623,3$, quantité plus grande que $\frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r}$; on trouve ensuite, en remontant aux expressions des lignes de la figure,

$$A'A'' = 1,6, \quad A''T = 619,8.$$

La construction de l'anse de panier n'a plus rien de difficile.

M. Bossut a donné dans l'Encyclopédie méthodique, une équation beaucoup plus compliquée que l'*équation* (A) ci-dessus : elle renferme d'ailleurs une erreur manifeste : l'Auteur y suppose qu'on peut prendre le premier rayon r d'une grandeur arbitraire, tandis que nous avons vu qu'il doit toujours être plus petit que la montée a : il faut en dire autant de la limite R qu'il n'est pas moins indispensable de considérer.

Nous avons déjà dit que, plus le nombre des centres est grand, plus le problème des anses a de solutions : on en diminue le nombre par celui des conditions que l'on s'impose. Le choix de ces conditions est important; en général les plus essentielles sont, 1°. que l'espace renfermé par l'anse ou le volume d'eau soit un *maximum*; 2°. que les changemens de courbure d'un arc à l'autre, soient les plus petits possibles. Voyons comment l'on peut remplir ces deux conditions.

Soit (fig. 51) une demi-anse à cinq centres. Nous avons vu que le second centre A'' peut être pris sur tous les points de l'arc elliptique compris dans l'angle AOT. Maintenant il est aisé de voir que si l'on prend le point A'' plus près de A', on aura une nouvelle anse de panier qui embrassera la première; ensorte que depuis le point Z jusqu'au point P, les volumes d'eau renfermée par les anses vont en augmentant, et dans ces deux limites, l'anse à cinq centres redevient à trois centres. Il s'ensuit que le premier rayon r et le dernier R restant les mêmes, plus le second rayon est petit, plus l'espace renfermé par la courbe est grand.

Il

Il n'est pas moins aisé de prouver que plus r augmente, plus R augmente aussi, et plus le volume d'eau est considérable.

Donc on approchera d'autant plus du *maximum* du volume d'eau, qu'on fera r et R plus grands et le rayon intermédiaire plus petit.

Voyons actuellement ce qui arrive relativement aux changemens de courbure : b et a restant les mêmes. On peut combiner d'une infinité de manières les trois rayons et l'angle AA'M. Il est évident que la combinaison la plus favorable serait celle pour laquelle les changemens de courbure qui ont lieu en M et M' seraient en même temps les plus petits, ou pour laquelle $\frac{A'M}{AA'}$ et $\frac{TS}{A''M}$ seraient des *minimums*. Ces deux conditions sont incompatibles et ne peuvent avoir lieu ensemble. Pour s'en convaincre, il faut faire varier séparément les indéterminées de la question.

Supposons d'abord les centres A' et T fixes, c'est-à-dire r et R constans : le second centre A'' pourra être pris arbitrairement sur l'arc elliptique PZ; plus A'' sera près de A', plus le changement de courbure en M sera petit; mais plus aussi il sera grand en M', et *vice versâ*. Cela sera vrai, indépendamment de toutes valeurs de r et R : donc on ne peut pas obtenir en même temps que les changemens de courbure en M et M' soient tous deux des *minimums*.

Il s'ensuit que le centre A'' étant fixe, plus on prendra T près de Z, plus $\frac{R}{r}$ sera petit. Mais c'est un théorème facile à démontrer que, quelle que soit la position de T, le point Z d'intersection de la montée avec l'arc elliptique, ne change point de place ou reste le même pour toutes les ellipses. En effet, quand on prend le second centre A'' au point Z, en imaginant la ligne A'Z, on a

$$A'Z + ZT = TS', \quad \text{ou} \quad A'Z = S'Z,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en un seul point Z, et alors l'anse devient à trois centres seulement. Donc plus T sera près de Z, plus $\frac{R}{r}$ sera petit, quelle que soit d'ailleurs la position du centre A''. On diminue donc le changement de courbure en M', lorsque le premier et le second rayon restant de même longueur, on rapproche

T de z; ce qui augmente, en même temps, l'arc AM et diminue l'arc MM'.

Si maintenant on fait varier le centre A', z changera de place. Les valeurs que nous avons déterminées pour r et R dans le problème premier, et qui donnent le *minimum* de $\frac{R}{r}$, auront encore lieu ici, puisqu'on est le maître de prendre le point T aussi près qu'on le veut de z.

La conclusion de ce qui précède est qu'il faut d'abord, dans les anses à cinq centres comme dans celles à trois centres, faire $AA' = r = \frac{b^2 + a^2 - (b-a)\sqrt{b^2+a^2}}{2b}$, et TS ou R un peu plus grand que $\frac{b^2 + a^2 + (b-a)\sqrt{b^2+a^2}}{2a}$: cette combinaison donnera un *minimum* pour $\frac{R}{r}$. Reste à savoir où il convient de placer le second centre A''. Nous avons vu qu'en diminuant le changement de courbure en M, on l'augmente en M', et réciproquement. Ce qu'il y a de plus avantageux à faire, est que les changemens en M et M' soient les mêmes. Pour cela, il faut que $\frac{A''M}{AA'} = \frac{TS}{A''M}$, ou que $\overline{A''M}^2 = \overline{TS}.\overline{AA'}$, ou que $A''M = \sqrt{rR}$, ce qui donne

$$A'A'' = -r + \sqrt{rR} \quad \text{et} \quad TA'' = R - \sqrt{rR}.$$

On aura donc le point A'' en décrivant du point A' avec un rayon $-r + \sqrt{rR}$, et du point T avec un rayon $R - \sqrt{rR}$, deux arcs de cercle dont l'intersection sera au point A''.

En récapitulant ce que nous avons dit dans ce problème, on voit, 1° qu'on approchera d'autant plus du *maximum* du volume d'eau, qu'on fera le premier rayon r et le troisième R plus grands, et le rayon intermédiaire plus petit; 2° que les deux changemens de courbure en M et M' seront d'autant plus petits que les valeurs de r et de R approcheront davantage de celles trouvées dans le problème Ier, en faisant le second rayon moyen proportionnel entre les deux autres.

Comme ces deux bases sont incompatibles, il faudra se rapprocher de l'une ou de l'autre, suivant les circonstances particulières.

Ainsi, si le pont est élevé et qu'on n'ait pas besoin d'augmenter le passage de l'eau, il faudra, comme nous l'avons dit, faire

$$r = \frac{b^2 + a^2 + (b - a)\sqrt{b^2 + a^2}}{2b},$$

R un peu plus grand que $\frac{b^2+a^2+(b-a)\sqrt{b^2+a^2}}{2a}$, et le rayon intermédiaire $= \sqrt{rR}$: ces proportions fournissent l'anse la plus gracieuse à l'œil.

Si au contraire on a intérêt à augmenter le libre passage de l'eau, il faudra prendre r très-peu au-dessous de a, faire R aussi grand que le permet l'exécution de l'épure, et prendre le second rayon très-petit, ou A″ voisin de P : cette combinaison fournira le plus grand volume d'eau possible.

M. Bossut, dans l'article précité de l'Encyclopédie, suppose le premier centre A′ constant, ainsi que l'angle AA′M, et il cherche sur la ligne MA″ indéfinie, et sur la montée prolongée, les centres A″ et T qui fournissent un *minimum* pour $\frac{R}{MA''}$, ou qui donnent le plus petit changement de courbure en M′. Cette hypothèse ne mène à rien, puisque nous avons vu qu'en diminuant le changement de courbure en M′, on l'augmente en M, et que par conséquent on perd d'un côté l'avantage acquis de l'autre; d'ailleurs l'Auteur ne fait varier que deux inconnues au lieu de quatre, et en faisant varier l'angle AA′M, il aurait vu qu'on est conduit à placer A″ et T le plus près possible de z : on a alors le *minimum* de tous les *maxima* qu'il a cherchés. Il faut donc regarder comme insignifiante l'hypothèse qu'il a considérée.

PROBLÈME IV.

Des anses à un nombre quelconque de centres.

Quel que soit le nombre des centres, les résultats suivans auront toujours lieu.

1°. On ne peut déterminer la variation ou le changement de

courbure dans l'un des points M, M′, M″, M‴,....etc. (fig. 50); sans l'augmenter dans les autres; d'où il suit qu'il n'y a aucun avantage dans les combinaisons de ce genre.

2°. Les centres A′ et T restant à la même place, et les autres rayons restant aussi les mêmes, on augmente le volume d'eau en rapprochant les points M, M′, M″, etc. du point A.

3°. Le point T étant fixe, l'anse à deux centres renfermera plus d'eau que toute autre; car on ne pourrait ajouter un centre de plus A″ à la figure 46, sans rapprocher A′ vers A, et la nouvelle courbe serait renfermée dans la première; d'où il suit que l'anse de la figure 48 est celle qui renferme le plus grand espace à bases et montées égales.

Il suit de ce qui précède, qu'en multipliant les centres, on diminue le volume d'eau, ainsi que le changement de courbure, et qu'ainsi en se rapprochant d'une espèce de perfection, on s'éloigne de l'autre. On se décidera donc suivant les circonstances, pour la préférence à donner à l'une ou à l'autre. Ainsi, si l'on a un grand intérêt à augmenter le volume de l'eau, on choisira une anse à trois centres; si au contraire on n'a pas besoin d'augmenter l'espace renfermé par l'anse, on préférera l'anse à un grand nombre de centres, afin de diminuer la variation de courbure d'un arc à l'autre.

Dans le premier cas, on fera le premier rayon r presqu'égal à la montée a, ce qui rendra l'autre R très-grand; il n'y a de borne à cette règle que celle qu'exige l'exécution de l'épure.

Dans le second cas, il faudra insérer entre r et R d'autres rayons intermédiaires r', r'', r''', etc. qui devront être des moyens géométriques : r étant un peu plus petit que a, et R un peu plus grand que $\frac{b^2+a^2-2br}{2a-2r}$. Les expressions de tous les rayons, en appelant n le nombre des centres de la demi-anse ou des rayons, seront

$$AA' = r,\quad A''M = r\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{n-1}} = r',\quad A'''M' = r\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{n-1}} = r'',$$

$$A^{\text{iv}}M'' = r\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{3}{n-1}} = r''' \ldots\ldots TS = R.$$

Ayant les grandeurs des rayons, on aura les côtés du polygone par des soustractions successives. Il restera ensuite à marquer les centres A', A'', A''', etc., ce qui peut se faire de bien des manières.

Imaginons que les côtés A'A'', A''A''', A'''A'''', A''''A^v, A^vT de grandeurs invariables, soient liés ensemble par des charnières en A'', A''', A'''', A^v, on voit que les cinq côtés de ce polygone, dont les extrémités sont fixées en A' et T, peuvent prendre une infinité de positions. Toutes celles de ces positions dans lesquelles le polygone aura tous ses angles saillans et compris dans l'angle A'OT, fourniront des anses de panier. Chaque centre A'', A''', A'''', A^v pourra varier entre deux limites $r''v''$, $r'''v'''$, $r^{\text{IV}}v^{\text{IV}}$, $r^{\text{v}}v^{\text{v}}$. On peut déterminer ces limites soit par la trigonométrie, soit par une construction graphique.

On peut y parvenir encore plus simplement, en formant le polygone A'A''A'''A''''A^vT avec des bandes de carton liées ensemble en A''A'''A''''A^v par des charnières de papier. Alors si l'on a intérêt d'augmenter le volume d'eau, on donnera au polygone une position qui rapprochera les centres A'', A''' de la ligne AO, position qui diminuera la longueur des premiers arcs AM, MM', et augmentera la longueur des arcs SM'''', M''''M^v dont les rayons sont les plus longs.

Si au contraire on n'a pas besoin d'augmenter le volume de l'eau, on donnera au polygone une position telle, que ses angles saillans A'', A''', A'''', A^v ne soient pas trop inégaux. Le goût suffira pour choisir la combinaison la plus gracieuse à l'œil. En général il paraît plus convenable que les arcs AM, MM', etc. ou croissent tous ou diminuent tous.

PROBLÈME V.

Faire une anse de panier d'un nombre quelconque de centres, dont les arcs soient d'un nombre de degrés déterminé, et dont les changemens de courbure soient égaux.

Dans le problème précédent, les angles formés par les rayons étaient arbitraires; ici nous les supposerons donnés ou liés par une loi.

Soit r le premier rayon AA′, et R le dernier TS : la raison de la progression sera $\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, n étant le nombre des rayons ; et en faisant pour abréger $\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^{\frac{1}{n-1}} = q$, les rayons successifs seront r, qr, q^2r, q^3r, q^4r........R ; je supposerai que la voûte a onze centres, ou la demi-voûte six, comme dans la figure 53 : ce que nous dirons s'appliquera aisément à un plus grand nombre de centres.

Soient ${}^{\mathrm{v}}\beta$, ${}^{\mathrm{iv}}\beta$, ${}'''\beta$, ${}''\beta$, ${}'\beta$, β, ... les nombres de degrés que doivent avoir les arcs AM, MM′, M′M″, M″M‴, M‴M^{iv}... M^{iv}S : en construisant sur les côtés du polygone les triangles rectangles A′A″R′, A″A‴R″, A‴A^{iv}R‴, A^{iv}A^{v}R^{iv}, A^{v}TR^{v}, on aura cette suite d'équations

$$
\begin{array}{l|l}
A'A'' = x\,(q-1) & TR^{\mathrm{v}} = TA^{\mathrm{v}} \cos\beta, \\
A''A''' = qx\,(q-1) & A^{\mathrm{v}}R^{\mathrm{iv}} = A^{\mathrm{iv}}A^{\mathrm{v}} \cos(\beta + {}'\beta), \\
A'''A^{\mathrm{iv}} = q^2x\,(q-1) & A^{\mathrm{iv}}R''' = A'''A^{\mathrm{iv}} \cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta), \\
A^{\mathrm{iv}}A^{\mathrm{v}} = q^3x\,(q-1) & A'''R'' = A''A''' \cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta + {}'''\beta), \\
A^{\mathrm{v}}T = q^4x\,(q-1) & A''R' = A'A'' \cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta + {}'''\beta + {}^{\mathrm{iv}}\beta).
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{v}}R^{\mathrm{v}} &= TA^{\mathrm{v}} \sin\beta, \\
A^{\mathrm{iv}}R^{\mathrm{iv}} &= A^{\mathrm{iv}}A^{\mathrm{v}} \sin(\beta + {}'\beta), \\
A'''R''' &= A'''A^{\mathrm{iv}} \sin(\beta + {}'\beta + {}''\beta), \\
A''R'' &= A''A''' \sin(\beta + {}'\beta + {}''\beta + {}'''\beta), \\
A'R' &= A'A'' \sin(\beta + {}'\beta + {}''\beta + {}'''\beta + {}^{\mathrm{iv}}\beta).
\end{aligned}
$$

Or il est évident qu'on doit avoir ces deux équations

$$TR^{\mathrm{v}} + A^{\mathrm{v}}R^{\mathrm{iv}} + A^{\mathrm{iv}}R''' + A'''R'' + A''R' = TO = R - a = q^5r - a \ldots (1),$$
$$A^{\mathrm{v}}R^{\mathrm{v}} + A^{\mathrm{iv}}R^{\mathrm{iv}} + A'''R''' + A''R'' + A'R' = A'O = b - r \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Substituant dans les équations (1) et (2), au lieu des lignes leurs expressions algébriques, ainsi que celles des rayons, elles deviennent

$$
\left.
\begin{aligned}
&(q-1)q^4r\cos\beta + (q-1)q^3r\cos(\beta + {}'\beta) + (q-1)q^2r\cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta) \\
&+ (q-1)qr\cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta + {}'''\beta) + (q-1)r\cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta + {}'''\beta + {}^{\mathrm{iv}}\beta) \\
&= q^5r - a;
\end{aligned}
\right\} (3)
$$

$$\left.\begin{array}{l}(q-1)q^4 r\sin\beta+(q-1)q^3 r\sin(\beta+{}'\beta)+(q-1)q^2 r\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta)\\ +(q-1)qr\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta)+(q-1)r\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta+{}^{\text{IV}}\beta)\\ =b-r.\end{array}\right\}\;(4)$$

Je multiplie l'équation (3) par $\frac{b}{r}$, et l'équation (4) par $\frac{a}{r}$, et les ayant ajoutées, j'ai la suivante, qui ne renferme plus r :

$$\left.\begin{array}{l}b(q-1)\,[q^4\cos\beta+q^3\cos(\beta+{}'\beta)+q^2\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta)\\ +q\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta)+\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta+{}^{\text{IV}}\beta)]\\ -bq^5+a(q-1)\,[q^4\sin\beta+q^3\sin(\beta+{}'\beta)+q^2\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta)\\ +q^2\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta)+q\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta)\\ +\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta+{}^{\text{IV}}\beta)]+a=0.\end{array}\right\}\dots\;(5)$$

Quand on connaîtra les angles β, ${}'\beta$, ${}''\beta$, etc., on pourra toujours déterminer q par l'équation (5), ensuite r par l'une des équations (3) et (4), et R par ~~l'équation $R = q^5 r$.~~

Si les angles β, ${}'\beta$, ${}''\beta$, etc. doivent être des fonctions de q, le problème serait d'un ordre plus élevé, et l'on ne pourrait avoir q que par tâtonnement.

Supposons, par exemple, que les arcs AM, MM', etc. doivent être d'égales longueurs, à l'exception de celui M''''S de la clef, qui, étant répété deux fois de part et d'autre de la montée, ne doit être que la moitié des autres ; on voit que cette condition exige que le nombre des arcs, c'est-à-dire ${}^{\text{V}}\beta$, ${}^{\text{IV}}\beta$, ${}'''\beta$, etc. soient en progression géométrique décroissante, dont la raison soit q. On aura donc

$${}'\beta=2\beta q;\quad {}''\beta=2\beta q^2;\quad {}'''\beta=2\beta q^3;\quad {}^{\text{IV}}\beta=2\beta q^4,\quad {}^{\text{V}}\beta=2\beta q^5:$$

mais on doit aussi avoir $\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta+{}^{\text{IV}}\beta+{}^{\text{V}}\beta=90°$.

Substituant dans cette dernière équation pour ${}'\beta$, ${}''\beta$, ${}'''\beta$, ${}^{\text{IV}}\beta$, ${}^{\text{V}}\beta$; leurs valeurs en β, et tirant ensuite la valeur de β, on a

$$\beta=\frac{90°}{2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1}.$$

On trouvera ensuite les valeurs de ${}'\beta$, ${}''\beta$, ${}'''\beta$, ... etc., en multipliant successivement celle de β par $2q$, $2q^2$, $2q^3$, etc., et l'équation (5) ne renfermera plus que b, a, q. Il ne sera pas possible

d'avoir q directement, mais on pourra y parvenir par des essais ou des substitutions.

En donnant successivement à q différentes valeurs, telles que 1,1, 1,2, 1,3, 1,4, ..., etc., on formerait entre b, a, r, et les autres rayons qr, q^2r, q^3r, ..., et les angles β, ${}'\beta$, ${}''\beta$, etc., une table au moyen de laquelle on pourrait toujours construire l'anse de panier dont on connaît b et a. Pour l'exactitude de la construction, il faudrait calculer trigonométriquement, à l'égard de AO et de OT, le lieu des centres A'', A''', A^{iv}, A^{v}, et les points d'intersection de la ligne AO avec les différens rayons.

Voici les calculs qui ont servi à construire la figure 53 : j'ai fait $a=1$, $q=1,5$, et j'ai trouvé

$\beta = 2^\circ\ 12'$	AA' $=0,6978$	A'R' $=0,1936$	A'R' $=0,2905$,
${}'\beta = 6^\circ\ 40'$	A'A'' $=0,3480$	A''R'' $=0,4348$	A''R'' $=0,2914$,
${}''\beta = 9^\circ\ 59'$	A''A''' $=0,5234$	A'''R''' $=0,7427$	A'''R''' $=0,2513$,
${}'''\beta = 14^\circ\ 59'$	A'''A^{iv} $=0,7849$	A^{v}R^{iv} $=1,1635$	A^{iv}R^{iv} $=0,1818$,
${}^{\text{iv}}\beta = 22^\circ\ 27'$	A^{iv}A^{v} $=1,1775$	TR^{v} $=1,7655$	A^{v}R^{v} $=0,0683$,
${}^{\text{v}}\beta = 42^\circ\ 42'$	A^{v}T $=1,7666$		
$b=1,784$			

Il est aisé de donner une forme générale à l'équation (5), et de la rendre applicable à un nombre quelconque n de centres ou de rayons d'une demi-anse, et l'on a

$$\left.\begin{array}{l} b(q-1)[\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+\ldots+{}^{n-2}\beta) \\ +q\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+\ldots+{}^{n-3}\beta)+q^2\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+\ldots+{}^{n-4}\beta)+\ldots] \\ -bq^{n-1}+a(q-1)[\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta\ldots+{}^{n-2}\beta) \\ +q\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+\ldots+{}^{n-3}\beta)+q^2\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+\ldots+{}^{n-4}\beta)+\ldots] \\ +a=0, \end{array}\right\}(6)$$

Il faut observer que dans cette formule les expressions ${}^{n-2}\beta$, ${}^{n-3}\beta$, ${}^{n-4}\beta$, n'indiquant pas des puissances de β : $n-2$, $n-3$, etc., indiquent seulement le nombre d'accens des angles successifs ; ensorte que quand on a $n-\beta$, par exemple, égal à zéro, $\cos{}^{n-4}\beta$ devient $\cos\beta$, et la série est terminée. On peut remarquer que pour deux rayons on a un terme seulement entre les deux crochets,

deux

deux termes pour trois rayons, trois termes pour quatre rayons, et ainsi de suite.

PROBLÈME VI.

Trouver la ligne de courbure uniformément croissante.

Imaginons que d'après la solution du problème précédent, on ait fait une anse de panier à mille, un million, etc. de centres. On passera d'un arc à l'autre par des degrés égaux de courbure. Maintenant, si on suppose que le nombre des centres ou des arcs soit infini, la suite de tous ces petits arcs égaux formera une courbe continue qui aura cette propriété, que les changemens de courbure s'y feront par degrés uniformes : c'est l'équation de cette courbe que je me propose de trouver. Nous verrons ensuite l'utilité dont elle peut être dans la construction des anses de panier.

Soit AS la courbe cherchée (fig. 54), $AP = x$, $PM = y$; puisqu'en divisant l'arc $AM = s$, en parties égales et infiniment petites, les rayons de courbure correspondans doivent être en progression géométrique, il s'ensuit que l'arc s doit être le logarithme du rayon de courbure en M. Ainsi la courbe cherchée est une espèce de logarithmique dans laquelle les arcs sont les logarithmes des rayons osculateurs; par conséquent, si on développait l'arc AM en ligne droite, et qu'on fit passer une courbe par les extrémités de tous ces rayons osculateurs qui deviendraient parallèles entre eux, cette courbe serait la logarithmique ordinaire. Par la même raison, si l'on ployait l'axe de la logarithmique ordinaire jusqu'à ce que les ordonnées vinssent à se toucher, cet axe ainsi ployé formerait la courbe que nous cherchons.

Cela posé, en appelant c le rayon de courbure AA′ de la courbe au point A, et φ celui du point M, l'équation de la courbe sera $s = \log\frac{\varphi}{c}$, ou (en appelant e le nombre 2,71825, dont le logarithme hyperbolique est 1) $ce^s = \varphi$.

Mettant dans cette équation pour φ son expression, qui est, dans le cas de ds constant, $\frac{dxds}{-d^2y}$, ou $\frac{ds\sqrt{ds^2-dy^2}}{-d^2y}$; on a

$$d^2y = -\frac{ds\sqrt{ds^2-dy^2}}{ce^s},$$

Pour intégrer cette équation, je fais $dy = pds$, ce qui donne $d^2y = dpds$; et substituant, on a

$$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = -\frac{ds}{ce^2},$$

dont l'intégrale est $c' + \text{arc}\sin p = \frac{1}{ce^s}$, ou $p = \sin\left(\frac{1}{ce^s} - c'\right)$, ($c'$ étant la constante qu'il faut ajouter après l'intégration).

Pour intégrer de nouveau, je remets pour p sa valeur $\frac{dy}{ds}$, ce qui donne $dy = ds \sin\left(\frac{1}{ce^s} - c'\right)$. Je fais $\frac{1}{ce^s} = u$, et après les substitutions, j'ai la transformée

$$dy = -\frac{du}{u}\sin(u-c') = -\frac{du}{u}\sin u.\cos c' + \frac{du}{u}\cos u.\sin c' \ldots (1)$$

Pour intégrer cette dernière équation, j'y substitue pour $\sin u$ et $\cos u$, leurs valeurs données par les séries suivantes, qui sont très-connues,

$$\sin u = u - \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^5}{2.3.4.5} - \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2.3.4} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.};$$

et après avoir intégré, j'ai l'équation suivante, dans laquelle c'' est la constante ajoutée,

$$\left.\begin{aligned} y = &-\cos c'\left(u - \frac{u^3}{2.\overline{3}^2} + \frac{u^5}{2.3.4.\overline{5}^2} + \text{etc.}\right) \\ &+ \sin c'\left(\log u - \frac{u^2}{\overline{2}^2} + \frac{u^4}{2.3.\overline{4}^2} - \text{etc.}\right) + c'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

Si dans l'équation $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$, on substitue pour dy, sa valeur tirée de l'équation (1), on a

$$dx = -\frac{du}{u}\cos(u-c') = -\frac{du.\cos u.\cos c'}{u} - \frac{du.\sin u.\sin c'}{u},$$

qui s'intègre comme l'équation (1), et donne

$$\left.\begin{aligned} x = &-\cos c'\left(\log u - \frac{u^2}{\overline{2}^2} + \frac{u^4}{2.3.\overline{4}^2} - \text{etc.}\right) \\ &- \sin c'\left(u - \frac{u^3}{2.\overline{3}^2} + \frac{u^5}{2.3.4.\overline{5}^2} - \text{etc.}\right) + c'' \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Pour déterminer les constantes c, c', c'', c''', il faut faire les remarques suivantes. La courbe doit remplir quatre conditions : 1°. elle doit être perpendiculaire sur l'axe en A ; 2°. On doit avoir en ce point $x=0$, $y=0$, $s=0$. 3°. La tangente de la courbe doit être perpendiculaire en S sur SO ; 4°. On doit avoir au point S, $x=b$, $y=a$. Pour remplir ces quatre conditions, il nous manque une constante arbitraire ; car si on éliminait u des équations (2) et (3), l'équation en x et y ne renfermerait que trois constantes : cela vient de ce que l'équation $\phi=ce^s$, que nous avons posée pour celle de la logarithmique, n'est pas assez générale : il eût fallu prendre $ds=\frac{kd\phi}{\phi}$, équation dans laquelle k est constant, et qui exprime en général la relation d'une progression arithmétique quelconque à une progression géométrique quelconque. Les trois intégrations successives auraient introduit trois nouvelles constantes : je n'ai pas suivi cette marche, qui aurait exigé qu'on eût l'équation finie en x et y.

On remplit également ce but, en substituant aux conditions (3) et (4), celle-ci : savoir, que $s=g$ dans le point S, ou bien cette autre, que dans le point S on ait $\frac{y}{x}=\frac{a}{b}=k$, ($k$ étant un rapport numérique).

Pour remplir la première condition, je fais $dy=ds$, et $s=0$ dans l'équation $dy=ds\sin\left(\frac{1}{ce^s}-c'\right)$, et elle devient

$$1=\sin\left(\frac{1}{c}-c'\right);$$

ou en appelant m l'arc de 90°, dans le cercle dont le rayon est 1, c'est-à-dire faisant $1{,}5708=m$, on a

$$m=\frac{1}{c}-c' \quad \text{ou} \quad c'=\frac{1}{c}-m\ldots\ldots(4).$$

Pour remplir la seconde condition, je fais $y=0$, $x=0$ et $s=0$, ou $u=\frac{1}{c}$ dans les équations (2) et (3), et elles donnent

$$c'' = \cos c' \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2.\overline{3}^2.c^3} + \frac{1}{2.3.4.\overline{5}^2.c^5} - \text{etc.}\right)$$

$$- \sin c' \left(- \log c - \frac{1}{\overline{2}^2 c^2} + \frac{1}{2.3.\overline{4}^2.c^4} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots (5).$$

$$c''' = \cos c' \left(- \log c - \frac{1}{\overline{2}^2 c^2} + \frac{1}{2.3.\overline{4}^2.c^4} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \sin c' \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2.\overline{3}^2.c^3} + \frac{1}{2.3.4.\overline{5}^2.c^5} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots\ldots (6).$$

Pour remplir la condition que $s = g$ à la clef S, je fais $s = g$ et $\frac{dy}{ds} = 0$ dans l'équation $dy = ds.\sin\left(\frac{1}{ce^s} - c\right)$, et elle devient

$$c' = \sin\left(\frac{1}{ce^g} - c'\right);$$

or l'arc dont le sinus est zéro est lui-même zéro; donc

$$\frac{1}{ce^g} - c' = 0 \quad \text{ou} \quad c' = \frac{1}{ce^g} \ldots\ldots (7);$$

combinant cette équation avec l'équation (4), on en tire

$$c = \frac{1}{m} - \frac{1}{me^g} \ldots\ldots (8).$$

Ainsi les quatre constantes seront données en fonction de g, et les équations (2) et (3) ne renfermeront plus que g et les variables x, y et u ou s.

Si pour troisième condition on veut que les coordonnées de la clef soient dans le rapport de $\frac{a}{b}$, ou qu'on ait $\frac{y}{x} = \frac{a}{b} = k$, on remarquera que l'équation (7) donne pour le point S, $c' = u$. Je fais donc dans les équations (2) et (3), $x = b$, $y = bk$, $u = c'$, et éliminant b, on aura l'équation suivante qui, après y avoir mis pour c' sa valeur en c, ne renfermera plus que c et k, et de laquelle par conséquent on pourra tirer la valeur de c en fonction de k,

$$(k \sin c' - \cos c')\left(c' - \frac{c'^3}{2.\overline{3}^2} + \frac{c'^5}{2.3.4.\overline{5}^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ (\sin c' + k \cos c')\left(\log c' - \frac{c'^2}{\overline{2}^2} + \frac{c'^4}{2.3.\overline{4}^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ (\cos c' - k \sin c')\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2.\overline{3}^2.c^3} + \frac{1}{2.3.4.\overline{5}^2.c^5} - \text{etc.}\right)$$
$$- (\sin c' + k \cos c')\left(-\log c - \frac{1}{\overline{2}^2.c^2} + \frac{1}{2.3.\overline{4}^2.c^4} - \text{etc.}\right) = 0 \ldots (9).$$

Les équations (4), (5), (6) donneront ensuite les valeurs de c', c'', c''' en fonctions de k.

D'après ce que nous avons dit dans le commencement de ce problème, on voit que si A't est une logarithmique ordinaire dont As est l'axe, et qu'on ploie l'axe As jusqu'à ce que les ordonnées ma''.....st de la logarithmique se touchent de deux en deux, l'axe As deviendra la courbe cherchée AS; les ordonnées de la logarithmique deviendront les rayons osculateurs de la nouvelle courbe : les extrémités a'', a''', a^{IV}.....t des ordonnées de la logarithmique tomberont sur les points A''A'''A^{IV}.......T de la courbe A'T, qui sera la développée de la courbe AS. Les points m, m', m''.....etc. tomberont sur M, M', M''....etc. La courbe AS sera, comme nous le verrons, une espèce de logarithmique spirale.

Si l'on ployait circulairement et du côté opposé l'axe As, jusqu'à ce que les ordonnées prolongées concourussent au centre du cercle dont cet axe serait la circonférence, la courbe passant par les extrémités des ordonnées serait la logarithmique spirale de Bernoulli.

On pourrait croire que puisque $st = \text{ST}$, on doit aussi avoir $\text{A}'t = \text{A'T}$; mais cela n'est pas : et effet, on a

$$\text{A'T} = \text{TS} - \text{AA}' = st - \text{AA}' :$$

or, A't est nécessairement plus grand que $st - \text{AA}'$: donc aussi $\text{A}'t > \text{A'T}$.

Si l'on suppose $g = \text{AS} = 2$, on trouve

$$c = 0{,}55045, \quad c' = 0{,}24587, \quad c'' = 2{,}0085,$$
$$c''' = -1{,}7805, \quad \text{AO} = 1{,}5659, \quad \text{OS} = 0{,}9163,$$

et l'on forme le tableau suivant pour la construction des courbes AS et A'T.

AM ou *s*.	PM ou *y*.	AP ou *x*.	MA' ou R.	PR ou sounormale.
0,0	0,0000	0,0000	0,5504	0,5504
0,2	0,1962	0,0337	0,6723	0,5741
0,4	0,3442	0,1237	0,8212	0,5782
0,6	0,5251	0,2544	1,0030	0,4902
0,8	0,6472	0,4125	1,2250	0,4152
1,0	0,7421	0,5884	1,4963	0,3335
1,2	0,8124	0,7755	1,8270	0,2525
1,4	0,8619	0,9693	2,2322	0,1767
1,6	0,8937	1,1671	2,7264	0,1087
1,8	0,9111	1,3659	3,3500	0,0496
2,0	0,9163	1,5658	4,0672	0,0000

En imitant la marche indiquée par ce tableau, et en calculant, pour plus d'exactitude, vingt points de la courbe au lieu de dix, on aurait les quarante-un centres d'une anse de panier qui serait à la fois très-régulière et très-agréable à l'œil : elle aurait l'avantage de laisser passer plus d'eau que l'ellipse et d'avoir les voussoirs égaux, tandis que l'augmentation de courbure, à partir de la clef, se ferait par des degrés égaux. On pourrait construire une table qui donnerait les cinq élémens de celle ci-dessus, pour tous les rapports entre la montée et l'ouverture, c'est-à-dire depuis $k = 0,1$ jusqu'à $k = 0,9$. Je pense que ce travail serait fort utile aux Architectes, et en particulier aux Ingénieurs des ponts et chaussées.

Si l'on calcule les valeurs de x et y correspondantes aux valeurs négatives de s, afin de continuer la courbe AS en dessous de l'axe

du côté de A, on trouve que la courbe fait des révolutions autour d'un certain point I (fig. 55) où elle n'arrive que lorsque $s = -\infty$.

Les équations (2) et (3) peuvent bien servir à calculer quelques-unes de ces spires; mais il sera plus court d'employer la méthode des quadratures ou celle qui se déduit du théorème de Taylor. On trouvera

$$\text{AR} = 0{,}428 \quad \text{et} \quad \text{RI} = 0{,}165.$$

Cette espèce de spirale logarithmique peut être le type de toutes les anses de panier possibles. On conçoit qu'il suffit de trouver sur la courbe deux points tels, que les normales AO et SO soient entre elles dans le rapport donné de la demi-ouverture à la montée.

On trouve que la développée de la courbe AS est une autre spirale ayant le même centre I que la première, et dont l'équation est de même forme.

Courbe dont les rayons osculateurs sont proportionnels aux arcs.

Dans la courbe qui a fait l'objet de ce problème, les rayons osculateurs étaient en progression géométrique, les arcs étant en progression arithmétique. On pourrait demander quelle est la courbe dans laquelle les rayons osculateurs sont en progression arithmétique. Voici comment on pourrait concevoir la génération.

Il faut imaginer que (fig. 54) A$'t$, au lieu d'être une logarithmique, est une ligne droite, et qu'on fasse ployer l'axe As jusqu'à ce que les ordonnées ma'', $m'a'''$, etc. se touchent de deux en deux: cet axe As deviendra la courbe cherchée AS. L'équation de la droite A'T rapportée à l'axe As sera

$$\varphi = cs + c' \quad \text{ou} \quad cs + c' = -\frac{dx.ds}{d^2y}.$$

En intégrant de la même manière que précédemment, on aura les deux équations

$$dy = ds \sin\left(\log \frac{c''}{(cs+c')^{\frac{1}{c}}}\right), \quad dx = ds \cos\left(\log \frac{c''}{(cs+c')^{\frac{1}{c}}}\right),$$

qui donnent pour la courbe cherchée une nouvelle spirale. Je ne

n'arrête pas à discuter cette dernière courbe, parce que la première est préférable. Je remarquerai seulement que lorsque la ligne droite $A't$ est parallèle à l'axe As, la courbe AS devient une circonférence de cercle.

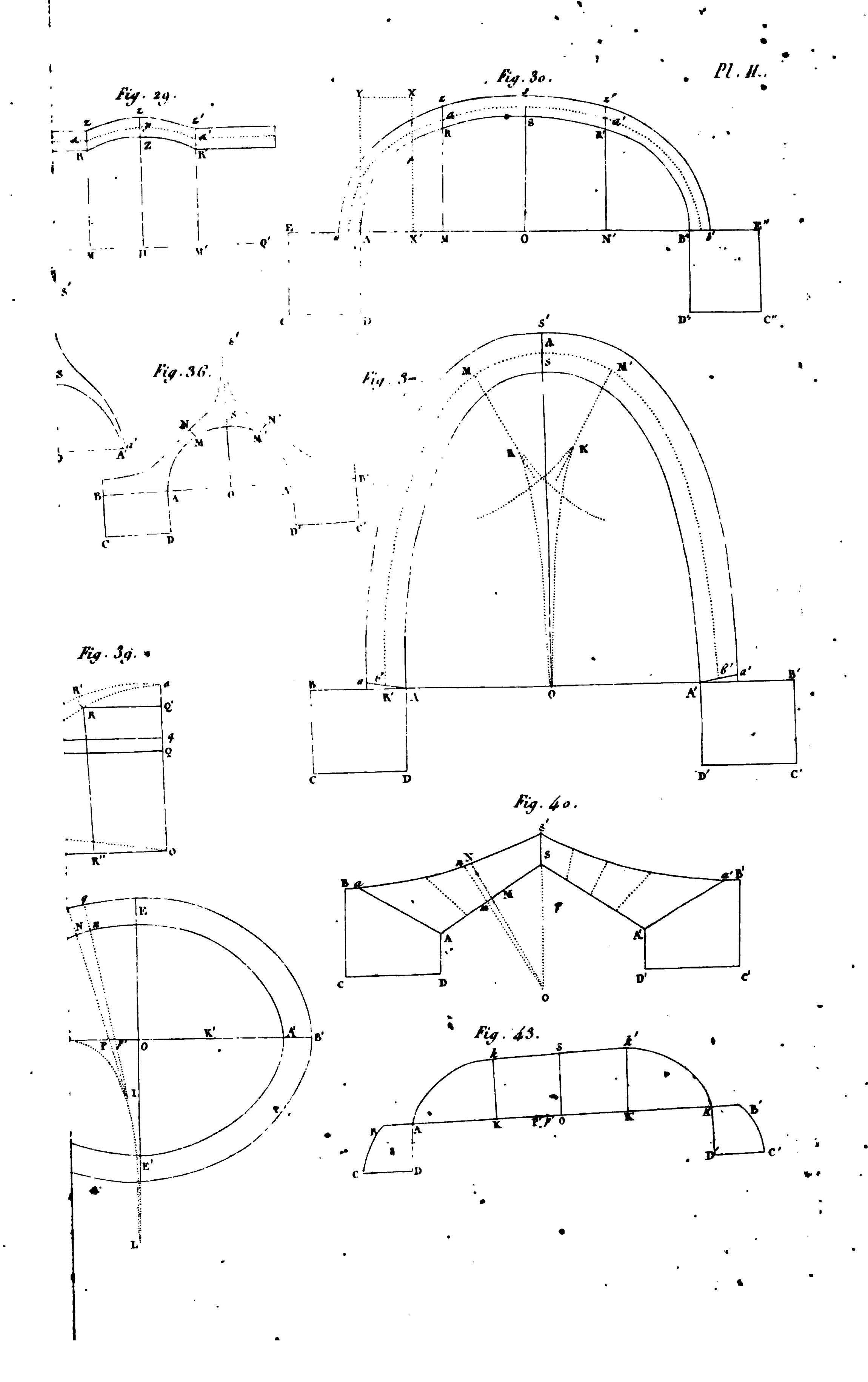
PROBLÈME VII.

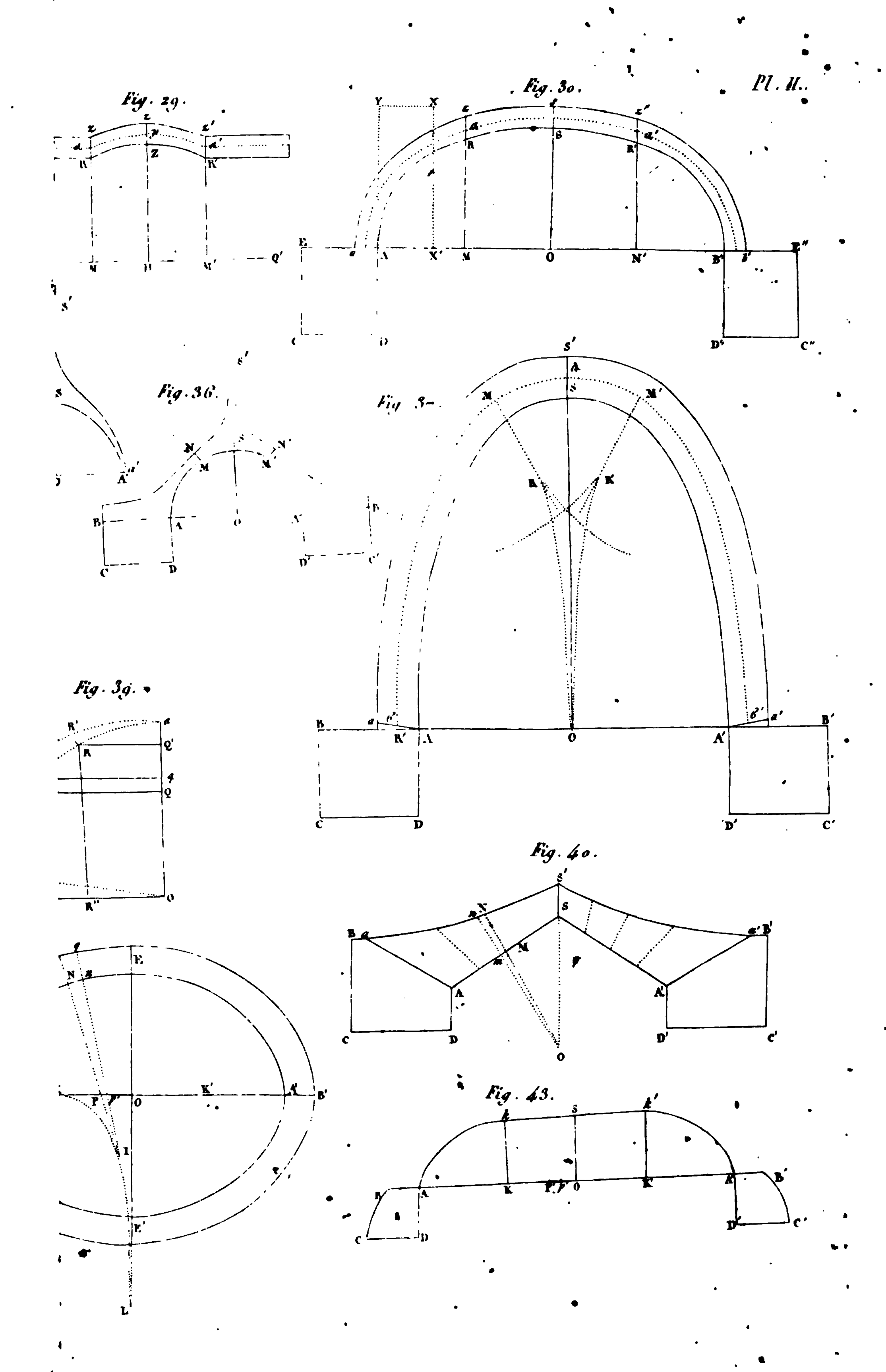
Sur l'équilibre et la poussée des anses de panier.

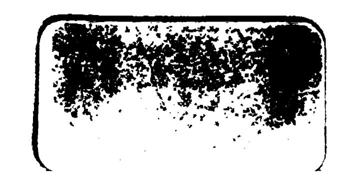
Tout ce que nous avons dit dans le cours de cet Ouvrage sur l'équilibre et la poussée des voûtes, a encore lieu lorsque l'intrados, au lieu d'être une courbe continue dont tous les points sont liés par une même loi ou équation, est une anse de panier, c'est-à-dire une réunion d'arcs de différens cercles. On peut toujours, au moyen de l'équation $M \cot \alpha = 0$, trouver l'extrados qui rend la voûte équilibrée. Quant à la poussée, il est évident qu'elle se calculera aussi par les méthodes que j'ai exposées. Il serait sans doute superflu de donner des exemples qui d'ailleurs étendraient trop les bornes de cet Ouvrage. Je remarquerai seulement que lorsque la voûte doit être un pont, on ne doit pas adopter pour intrados une courbe pour laquelle l'extrados exigé par l'équilibre s'écarterait trop de la ligne droite. Dans ce calcul, il faut tenir compte de la nature des matériaux compris entre l'intrados et l'extrados, et il peut arriver dans certains cas que la courbe du problème VI ne comportant pas un extrados sensiblement rectiligne, ne puisse pas être employée pour intrados.

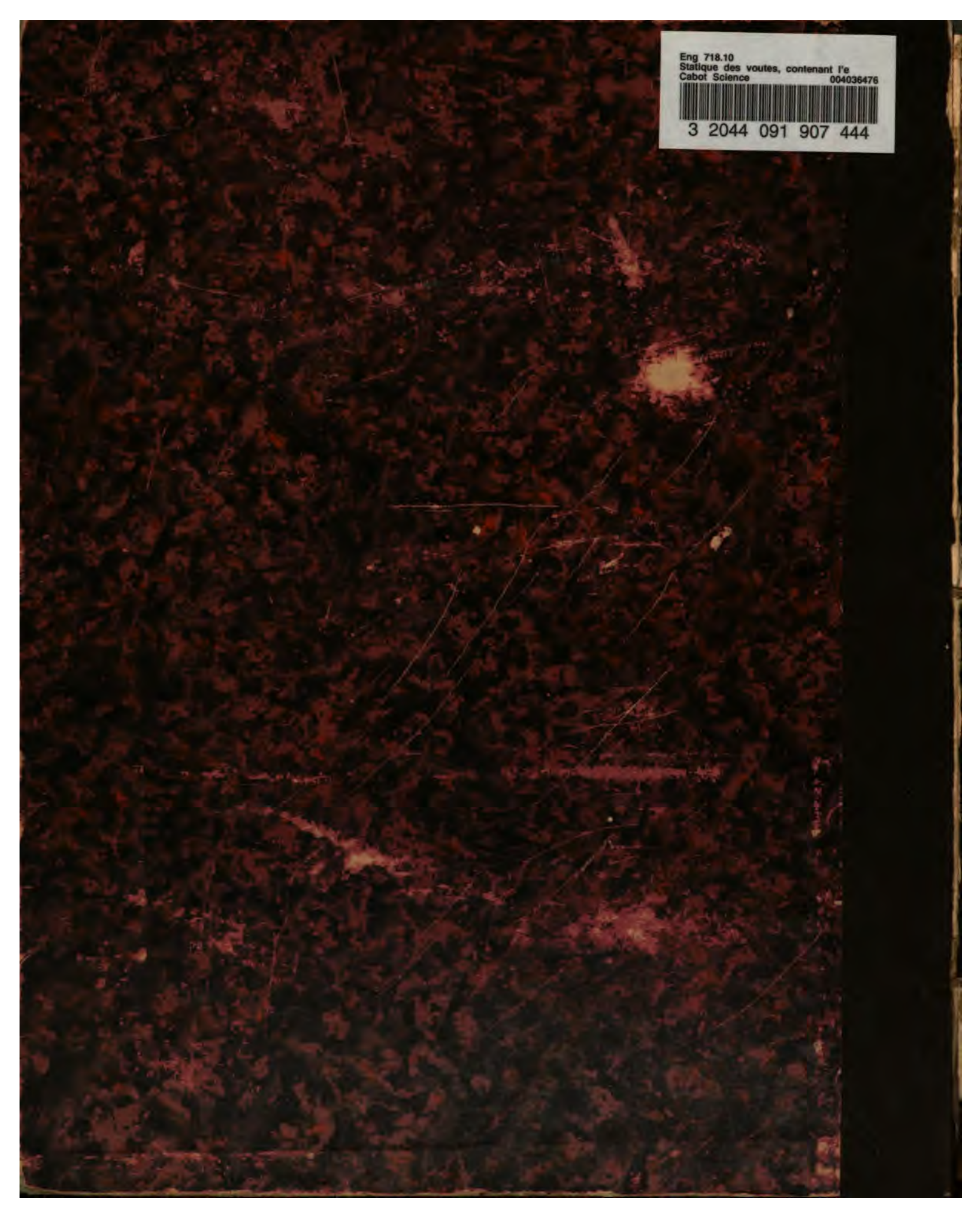
FIN.

Pl. II.




Pl. II.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 36.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 43.




Eng 718.10
Statique des voutes, contenant l'e
Cabot Science 004036476
3 2044 091 907 444